

N° D'ORDRE

728.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. W. DE TANNENBERG,

Professeur au Lycée de Lyon.

1^{re} THÈSE. — SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER
ORDRE À DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES, QUI ADMETTENT
UN GROUPE CONTINU DE TRANSFORMATIONS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 23 juillet 1891 devant la Commission d'Examen.

MM. DARBOUX, *Président.*

APPELL,

PICARD,

Examinateurs.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

N° D'ORDRE

728.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. W. DE TANNENBERG,

Professeur au Lycée de Lyon.

1^{re} THÈSE. — SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER
ORDRE A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES, QUI ADMETTENT
UN GROUPE CONTINU DE TRANSFORMATIONS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 2 } juillet 1891 devant la Commission d'Examen.

MM. DARBOUX, *Président.*

APPELL, }
PICARD, } *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—
1891

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
PROFESSEURS HONORAIRES ..	PASTEUR.	
	DUCHARTRE.....	Botanique.
	DE LACAZE-DUTHIERS.	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	HERMITE.....	Algèbre supérieure.
	TROOST.....	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	O. BONNET.....	Astronomie.
	TISSERAND.....	Astronomie.
	LIPPMANN.....	Physique.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
	BOUTY.....	Physique.
PROFESSEURS	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX.....	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ.....	Mécanique physique et expé- rimentale.
	PICARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ.....	Calcul des probabilités, Phy- sique mathématique.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
CHARGÉ DE COURS	MUNIER-CHALMAS.....	Géologie.
PROFESSEURS ADJOINTS	WOLF.....	Physique céleste.
	CHATIN.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	JOLY.....	Chimie.
SECRÉTAIRE	PHILIPPON.	

A

M. SOPHUS LIE.

Hommage de respectueuse reconnaissance,

W. DE TANNENBERG.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR LES ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE

A DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES,

QUI ADMETTENT UN GROUPE CONTINU DE TRANSFORMATIONS.

PRÉFACE.

Je me propose, dans ce travail, de déterminer les équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

qui admettent un groupe continu de transformations (ponctuelles). On sait que M. Sophus Lie a résolu le problème analogue pour les équations différentielles ordinaires et montré comment ces équations en nombre infini dérivent par une transformation ponctuelle d'un nombre limité d'entre elles, qu'il a appelées *formes canoniques*. La méthode suivie par M. Sophus Lie pourrait servir également pour la solution du problème proposé; mais il faudrait, pour cela, déterminer les équations invariantes qui correspondent à chacun des nombreux groupes ponctuels de l'espace à trois dimensions; or la recherche de ces groupes constitue un problème difficile, dont la solution n'a pas encore été publiée ⁽¹⁾. On peut éviter cette détermination en utilisant une remarque déjà ancienne de M. Sophus Lie. L'illustre géomètre a montré, en effet, qu'il existe une correspondance remarquable entre les

⁽¹⁾ Dans la préface de l'ouvrage de MM. Lie et Engel sur la théorie des groupes, M. Lie annonce que le calcul de tous les groupes ponctuels de l'espace à trois dimensions sera développé dans le troisième volume.

équations (1) et les équations ordinaires du troisième ordre

$$(2) \quad H(x, y, y', y'', y''') = 0,$$

qui admettent un groupe de transformations de contact. Cette correspondance permet de déduire très simplement les équations cherchées (1) des équations déjà connues (2) dans le cas où ces équations admettent un groupe à plus de trois paramètres. Le travail actuel n'est autre chose que le développement de cette idée.

Dans la première Partie, j'indique avec plus de précision le principe fondamental, qui est l'origine de ce Mémoire, et je détermine, d'après M. Sophus Lie, les formes canoniques des équations différentielles du troisième ordre qui admettent un groupe de transformations de contact à plus de trois paramètres. Ces formes sont au nombre de sept distinctes.

La seconde Partie, la seule qui contienne des résultats complètement nouveaux, comprend la détermination des équations aux dérivées partielles qui font l'objet de cette étude. Après avoir choisi les équations canoniques qui m'ont semblé les plus avantageuses, je me suis appliqué à les interpréter géométriquement. La simplicité des résultats que j'ai ainsi obtenus me donne lieu d'espérer que le calcul m'a bien guidé dans mon choix. En examinant toutes les formes canoniques trouvées, on aperçoit que :

Toute équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables indépendantes, admettant un groupe ponctuel à plus de trois paramètres, dérive, par une transformation ponctuelle (en général non homographique), d'une équation pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales appartiennent à un complexe.

Pour ne pas rompre l'unité de ce travail, je n'ai pas indiqué les équations aux dérivées partielles qui admettent un groupe ponctuel à moins de quatre paramètres. Il n'y a pas lieu en effet de les déduire des équations différentielles du troisième ordre qui leur correspondent, car il est beaucoup plus simple de les obtenir en appliquant la méthode générale dont j'ai parlé, et qui est fondée sur la détermination des groupes ponctuels à un, deux et trois paramètres. Ces équations se séparent d'ailleurs nettement des autres, tant au point de vue analytique qu'au point de vue géométrique.

L'étude des caractéristiques des équations canoniques m'a conduit à parler des courbes gauches qui admettent une transformation homogra-

phique infinitésimale. Le dernier Chapitre est consacré à la détermination de ces courbes.

Enfin je montre dans une Note comment quelques équations très connues peuvent être ramenées à une de mes formes canoniques. Je me réserve d'ailleurs, dans une publication prochaine, d'indiquer les moyens de reconnaître si une équation aux dérivées partielles admet un groupe de transformations et les intégrations à effectuer pour la ramener dans ce cas à sa forme canonique.

Je tiens à remercier, en terminant, mon illustre maître, M. Sophus Lie, qui m'a initié avec tant de bienveillance à sa théorie des groupes de transformations et a bien voulu me laisser ce sujet d'étude.



PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

1. On appelle *élément* d'une ligne C

$$(C) \quad x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

l'ensemble formé par un point de cette ligne et la tangente en ce point. Les six quantités x, y, z, dx, dy, dz , qui déterminent complètement la position de l'élément correspondant au point (x, y, z) , sont dites les *coordonnées* de cet élément. L'ensemble (m, d) d'un point m et d'une droite d passant par ce point constitue évidemment un élément commun à une infinité de lignes : nous l'appellerons pour cette raison un *élément de ligne* ou *élément linéaire* ⁽¹⁾.

Plusieurs éléments de ligne sont dits *unis* suivant une courbe si chacun d'eux est un élément de cette courbe.

Si l'on effectue une transformation ponctuelle

$$(1) \quad x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z),$$

on voit immédiatement que les courbes qui admettent un élément commun (m, d) se changent en courbes ayant aussi un élément commun (m', d') ; cet élément est dit le *correspondant* ou le *transformé* de l'élément (m, d) par rapport à la transformation (1). Si x, y, z, dx, dy, dz sont les coordonnées de (m, d) , celles de (m', d') sont données par les équations (1) et les

⁽¹⁾ Les notions fondamentales d'élément linéaire et d'élément de surface sont dues, comme on sait, à M. Sophus Lie.

suivantes

$$(2) \quad \begin{cases} dx' = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz, \\ dy' = \frac{\partial Y}{\partial x} dx + \frac{\partial Y}{\partial y} dy + \frac{\partial Y}{\partial z} dz, \\ dz' = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy + \frac{\partial Z}{\partial z} dz. \end{cases}$$

A des éléments de ligne unis suivant une courbe C correspondent évidemment des éléments de ligne unis suivant la courbe C' transformée de la courbe C.

Supposons, en particulier, que les équations (1) définissent un groupe G à r paramètres et à trois variables x, y, z ; dans ce cas, les équations (1) et (2), considérées comme définissant des transformations à six variables indépendantes x, y, z, dx, dy, dz , déterminent aussi un groupe à r paramètres. Ce groupe est dit un groupe *prolongé* ⁽¹⁾ de G; il indique la loi suivant laquelle les transformations de G échangent entre eux les éléments linéaires de l'espace. En outre, si le groupe G est engendré par les r transformations infinitésimales

$$X_i f = \xi_i(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

le groupe prolongé est engendré par

$$X_i f + X'_i f, \quad f = f(x, y, z, dx, dy, dz),$$

où

$$X'_i f = \lambda_i \frac{\partial f}{\partial dx} + \mu_i \frac{\partial f}{\partial dy} + \nu_i \frac{\partial f}{\partial dz}$$

et

$$\lambda_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi_i}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi_i}{\partial z} dz,$$

$$\mu_i = \frac{\partial \eta_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta_i}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta_i}{\partial z} dz,$$

$$\nu_i = \frac{\partial \zeta_i}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta_i}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} dz.$$

2. On appelle *élément* d'une surface S l'ensemble (m, P) formé par un point m de cette surface et le plan P tangent en ce point. Un élément linéaire d'une courbe tracée sur la surface S sera appelé un *élément linéaire* de

(1) SOPHUS LIE, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. I, p. 524.

la surface. On peut dire alors que l'élément (m, P) est l'ensemble des éléments linéaires de S issus du point m .

Les coordonnées x, y, z et les coefficients de direction l, m, n de la normale au plan P sont les six coordonnées de l'élément (m, P) .

L'ensemble formé par un point quelconque et un plan quelconque passant par ce point est évidemment un élément commun à une infinité de surfaces; pour cette raison, nous l'appellerons un *élément de surface*.

Plusieurs éléments de surface sont dits *unis* suivant la surface S , si chacun d'eux est un élément de cette surface.

Supposons qu'on effectue une transformation ponctuelle quelconque

$$(1) \quad x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z),$$

l'élément (m', P') qui est constitué par les transformés des éléments linéaires de l'élément (m, P) est dit l'élément *correspondant* ou *transformé* de (m, P) par rapport à la transformation (1). Si (x, y, z, l, m, n) sont les coordonnées de l'élément (m, P) , celles de l'élément (m', P') sont données par l'identité

$$(2) \quad l dx + m dy + n dz = l' dx' + m' dy' + n' dz',$$

équivalente au système

$$(3) \quad \begin{cases} l = l' \frac{\partial X}{\partial x} + m' \frac{\partial Y}{\partial x} + n' \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ m = l' \frac{\partial X}{\partial y} + m' \frac{\partial Y}{\partial y} + n' \frac{\partial Z}{\partial y}, \\ n = l' \frac{\partial X}{\partial z} + m' \frac{\partial Y}{\partial z} + n' \frac{\partial Z}{\partial z}, \end{cases}$$

et l'on voit que :

Si plusieurs surfaces ont un élément commun (m, P) , leurs transformées ont également un élément commun, à savoir l'élément (m', P') . Des éléments de surface unis suivant une surface S se transforment en éléments de surface unis suivant la surface S' transformée de S .

Supposons maintenant que les équations (1) définissent un groupe G à r paramètres et à trois variables x, y, z ; dans ce cas, les équations (1) et (3), considérées comme définissant des transformations à six variables indépendantes x, y, z, l, m, n , déterminent aussi un groupe à r paramètres. Ce groupe est dit aussi un *groupe prolongé* du groupe G ; il indique la loi sui-

vant laquelle les transformations de G échangent entre eux les éléments de surface de l'espace.

On démontre facilement que, si le groupe G est engendré par les r transformations infinitésimales

$$X_i f = \xi_i(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_i(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}, \quad i = 1, 2, \dots, r,$$

le groupe prolongé est engendré par

$$X_i f + X'_i f, \quad f = f(x, y, z, l, m, n),$$

où

$$X'_i f = \lambda_i \frac{\partial f}{\partial l} + \mu_i \frac{\partial f}{\partial m} + \nu_i \frac{\partial f}{\partial n}$$

et

$$\lambda_i = - \left(l \frac{\partial \xi_i}{\partial x} + m \frac{\partial \eta_i}{\partial x} + n \frac{\partial \zeta_i}{\partial x} \right),$$

$$\mu_i = - \left(l \frac{\partial \xi_i}{\partial y} + m \frac{\partial \eta_i}{\partial y} + n \frac{\partial \zeta_i}{\partial y} \right),$$

$$\nu_i = - \left(l \frac{\partial \xi_i}{\partial z} + m \frac{\partial \eta_i}{\partial z} + n \frac{\partial \zeta_i}{\partial z} \right).$$

Au lieu de prendre pour coordonnées d'un élément de surface les six quantités (x, y, z, l, m, n) , on peut choisir le système équivalent $(x, y, z, -p, -q, 1)$. Dans ce cas, les transformations finies du groupe prolongé de G sont données par les relations

$$x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z),$$

$$p(dz - p dx - q dy) = dz' - p' dx' - q' dy',$$

et les transformations infinitésimales sont

$$X_i f + \pi_i \frac{\partial f}{\partial p} + \chi_i \frac{\partial f}{\partial q}, \quad f = f(x, y, z, p, q)$$

où

$$\pi_i = \frac{d\zeta_i}{dx} - p \frac{d\xi_i}{dx} - q \frac{d\eta_i}{dx}, \quad \frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z},$$

$$\chi_i = \frac{d\zeta_i}{dy} - p \frac{d\xi_i}{dy} - q \frac{d\eta_i}{dy}, \quad \frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z}.$$

3. Considérons les éléments de ligne en nombre doublement infini qui sont unis en un point quelconque s de l'espace. Une infinité simple (et continue) de ces éléments constitue ce que l'on appelle un *cône élémentaire*.

Appliquons à ces derniers une transformation ponctuelle quelconque

$$(1) \quad x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z).$$

La famille des éléments linéaires transformés détermine un second cône élémentaire qui est dit le *transformé* ou le *correspondant* du premier relativement aux équations (1). Désignons le premier cône par C, le second par C'. L'élément de surface défini par les deux éléments linéaires (s, sa) et (s, sb) du cône C a pour transformé l'élément de surface déterminé par les deux éléments linéaires $(s', s'a')$ et $(s', s'b')$ du cône C'. De là on conclut immédiatement que l'élément de surface (s, P) formé par le point (s) et le plan tangent au cône C suivant (sa) a pour transformé l'élément (s', P') , formé par le point s' et le plan tangent au cône C' suivant $s'a'$.

On peut donc dire que :

Le cône élémentaire C' est l'enveloppe des éléments de surface (s', P') correspondant aux éléments de surface (s, P) du cône C. Les génératrices de contact de deux éléments de surface correspondants appartiennent à deux éléments linéaires correspondants.

Une relation entre x, y, z, dx, dy, dz (homogène en dx, dy, dz)

$$(1) \quad \Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

fait évidemment correspondre à chaque point de l'espace un cône élémentaire C. L'équation (1) sera appelée *l'équation du système des cônes élémentaires C*. L'équation aux dérivées partielles

$$(2) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

fait aussi correspondre à chaque point (x, y, z) de l'espace un cône élémentaire déterminé T, à savoir celui qui est enveloppé par les éléments de surface, dont les coordonnées $(x, y, z, -p, -q, 1)$ satisfont à l'équation (2).

L'équation du système des cônes élémentaires T est l'équation

$$(1) \quad \Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

obtenue en éliminant p et q entre l'équation (2) et les suivantes

$$\frac{dx}{\frac{\partial F}{\partial p}} - \frac{dy}{\frac{\partial F}{\partial q}} = \rho \frac{dz}{\frac{\partial F}{\partial p}} + q \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Les équations (1) et (2) sont liées de telle manière que la connaissance de l'une entraîne évidemment celle de l'autre. Nous dirons que l'équation (1) est l'équation aux différentielles totales *associée* à l'équation (2).

Dans la suite, nous supposerons presque toujours une équation aux dérivées partielles, du premier ordre et à trois variables, définie par son équation associée. Nous verrons en effet que, pour la solution du problème proposé, la considération des formes (1) est plus avantageuse que celle des formes (2).

CHAPITRE II.

SUR LES CARACTÉRISTIQUES D'UNE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES (NON LINÉAIRE)

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0.$$

CORRESPONDANCE ENTRE CES ÉQUATIONS ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DU TROISIÈME ORDRE A DEUX VARIABLES.

1. On sait que les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1)$$

constituent une famille de courbes à trois paramètres. La réciproque de cette proposition n'est pas vraie : une famille de courbes à trois paramètres a, b, c , représentée par les équations

$$(1) \quad f(x, y, z, a, b, c) = 0, \quad g(x, y, z, a, b, c) = 0,$$

ne coïncide pas, en général, avec l'ensemble des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles. Toutefois les équations (1) définissent des courbes intégrales d'une équation aux dérivées partielles bien déterminée, à savoir, l'équation associée à l'équation

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

(1) Comme l'indique le titre, nous ne considérerons dans ce Chapitre que les équations aux dérivées partielles non linéaires.

obtenue en éliminant a, b, c entre les équations (1) et les suivantes

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz &= 0, \\ \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz &= 0.\end{aligned}$$

Dans un Mémoire célèbre ⁽¹⁾, M. Sophus Lie a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour que les équations (1) représentent les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles. Je vais rappeler ici ce résultat :

THÉORÈME. — *Pour que le système de courbes représenté par les équations (1) soit l'ensemble des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles, il faut et il suffit qu'en éliminant x, y, z entre les équations (1) et les suivantes*

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db + \frac{\partial f}{\partial c} dc = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial a} da + \frac{\partial g}{\partial b} db + \frac{\partial g}{\partial c} dc = 0,$$

on obtienne une équation linéaire en da, db, dc , et non intégrable, à savoir :

$$(3) \quad A(a, b, c) da + B(a, b, c) db + C(a, b, c) dc = 0.$$

D'abord la condition est nécessaire. En effet, supposons que les équations (1) représentent les caractéristiques de l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Le système (1), considéré comme un système d'équations à six variables x, y, z, a, b, c , est alors équivalent à un système de la forme

$$(4) \quad V(x, y, z, a', b') = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a'} + c' \frac{\partial V}{\partial b'} = 0,$$

où a', b', c' désignent des fonctions de a, b, c .

Or, si l'on différentie les équations (4), en considérant x, y, z comme constants, et si l'on élimine x, y, z entre les équations obtenues et les équations (4), on obtient l'équation

$$db' - c' da' = 0,$$

qui est bien linéaire en da, db, dc (et non intégrable).

⁽¹⁾ *Mathematische Annalen*, t. V.

Démontrons maintenant que la condition est suffisante. Supposons que l'équation (3) soit une conséquence des équations (1) et (2); je dis que les équations (1) représentent les caractéristiques d'une certaine équation aux dérivées partielles.

En effet, on sait qu'en remplaçant a, b, c par des fonctions convenablement choisies de a, b, c , on peut ramener l'équation de Pfaff (3) à la forme canonique

$$(5) \quad db - c da = 0.$$

Supposons que l'on ait fait cette réduction et mis en outre les équations (1) sous la forme

$$(6) \quad V(x, y, z, a, b) = 0,$$

$$(7) \quad c - U(x, y, z, a, b) = 0.$$

Cela posé, l'équation (5) est une conséquence des équations (6), (7) et des suivantes

$$(8) \quad \frac{\partial V}{\partial a} da + \frac{\partial V}{\partial b} db = 0,$$

$$(9) \quad dc - \frac{\partial U}{\partial a} da - \frac{\partial U}{\partial b} db = 0.$$

Or, l'équation (5) ne contient pas dc ; donc, pour toutes les valeurs de x, y, z, a, b, c , satisfaisant aux équations (6) et (7), on a l'identité en da et db ,

$$db - c da = \lambda \left(\frac{\partial V}{\partial a} da + \frac{\partial V}{\partial b} db \right),$$

c'est-à-dire

$$\lambda \frac{\partial V}{\partial a} = -c, \quad \lambda \frac{\partial V}{\partial b} = 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial V}{\partial b} \neq 0.$$

On voit donc que, pour toutes les valeurs de x, y, z, a, b, c satisfaisant aux équations (6) et (7), on a

$$\frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

Si donc on considère les deux systèmes d'équations à six variables $x, y,$

$z, a, b, c,$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(x, y, z, a, b) = 0, \\ c - U(x, y, z, a, b) = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} V(x, y, z, a, b) = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0. \end{array} \right.$$

On peut affirmer que toute solution du premier système est une solution du second. Les secondes équations des deux systèmes étant linéaires en (c) , la réciproque est évidente. Il résulte de là que les deux systèmes sont équivalents et le théorème est démontré.

2. La démonstration précédente met en évidence le fait suivant :

Si les équations

$$(1) \quad f(x, y, z, a, b, c) = 0, \quad g(x, y, z, a, b, c) = 0$$

représentent les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles et si les paramètres a, b, c ont été choisis de manière que l'équation

$$db - c da = 0$$

soit une conséquence des équations

$$f = 0, \quad g = 0, \quad \delta f = 0, \quad \delta g = 0,$$

où

$$\delta = \frac{\partial}{\partial a} da + \frac{\partial}{\partial b} db + \frac{\partial}{\partial c} dc,$$

on peut mettre le système (1) sous la forme

$$(2) \quad V(x, y, z, a, b) = 0, \quad V' = \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0;$$

il suffit pour cela de résoudre l'une des équations (1) par rapport à c et de porter la valeur trouvée dans l'autre.

Nous dirons que le système (2) est, pour les caractéristiques, un système d'équations *normal*. Il est clair, d'ailleurs, qu'il existe une infinité de systèmes normaux correspondant à la même famille de caractéristiques.

Voyons maintenant comment on peut passer d'un système normal à un autre.

Soit

$$(3) \quad W(x, y, z, a', b') = 0, \quad W' = \frac{\partial W}{\partial a'} + c' \frac{\partial W}{\partial b'} = 0$$

un système normal quelconque. Les équations (2) et (3) représentant la même famille de courbes, a' , b' , c' sont des fonctions déterminées de a , b , c . Considérons alors les équations (2) et (3) comme des équations à six variables x, y, z, a, b, c ; comme les systèmes (2) et (3) sont équivalents, l'équation

$$db' - c' da' = 0,$$

qui est une conséquence des équations

$$W = 0, \quad W' = 0, \quad \delta W = 0, \quad \delta W' = 0,$$

est aussi une conséquence de

$$V = 0, \quad V' = 0, \quad \delta V = 0, \quad \delta V' = 0,$$

et, par suite,

$$(4) \quad db' - c' db' = \rho(db - c da).$$

De là la règle suivante pour déduire toutes les formes normales d'une forme normale déterminée (2).

On effectue sur les quantités a, b, c la transformation de contact la plus générale définie par l'identité (4); le système (2) devient alors

$$(5) \quad \varphi(x, y, z, a', b', c') = 0, \quad \psi(x, y, z, a', b', c') = 0;$$

on résout ensuite l'une des équations (5) par rapport à c' et l'on porte la valeur trouvée dans l'autre; le système (5) prend alors la forme suivante

$$U(x, y, z, a', b') = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial a'} + c' \frac{\partial U}{\partial b'} = 0,$$

qui est la forme normale la plus générale.

3. Je vais maintenant rappeler la correspondance établie, par M. S. Lie, entre les équations aux dérivées partielles non linéaires $F(x, y, z, p, q) = 0$, et les équations différentielles ordinaires du troisième ordre à deux variables ⁽¹⁾.

(1) Consulter à ce sujet *Archives de Christiania*, t. X, année 1884, p. 125-128.

Supposons les caractéristiques de l'équation

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

définies par les équations

$$(2) \quad V(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

L'équation

$$db - c da = 0$$

est une conséquence des équations

$$V = 0, \quad V' = 0, \quad \delta V = 0, \quad \delta V' = 0, \quad \text{où} \quad \delta = \frac{\partial}{\partial a} da + \frac{\partial}{\partial b} db + \frac{\partial}{\partial c} dc;$$

donc, si l'on donne à x, y, z des valeurs déterminées et si l'on considère (a, b, c) comme les coordonnées d'un élément linéaire du plan, on peut dire que les équations (2) définissent un système d'éléments linéaires unis suivant une courbe C. A tous les systèmes de valeurs de x, y, z correspond une famille de courbes C à trois paramètres x, y et z . L'équation différentielle du troisième ordre

$$(3) \quad H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2b}{da^2}, \frac{d^3b}{da^3}\right) = 0,$$

dont les courbes intégrales constituent la famille des courbes C, est dite l'équation différentielle du troisième ordre correspondant à la forme normale (2). A chacune des formes normales que peut affecter le système des équations des caractéristiques correspond ainsi une équation telle que (3). Les équations qui viennent d'être définies forment une catégorie remarquable d'équations différentielles du troisième ordre liées à l'équation (1). Il résulte, en effet, de ce qui a été dit au sujet du passage d'une forme normale à une autre, qu'on peut obtenir toutes ces équations différentielles en appliquant à l'une d'entre elles toutes les transformations de contact du plan. Supposons alors que, parmi ces équations, on en choisisse une d'après une loi déterminée; cette équation suffit pour faire connaître toutes les autres et peut, par conséquent, être prise pour représenter toute la famille.

Inversement, considérons une équation de troisième ordre quelconque

$$(1) \quad H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2b}{da^2}, \frac{d^3b}{da^3}\right) = 0.$$

Supposons que les courbes intégrales soient représentées par l'équation à trois paramètres x, y, z ,

$$V(x, y, z, a, b) = 0.$$

L'ensemble des éléments linéaires (a, b, c) des courbes intégrales est défini par les équations

$$(2) \quad V(x, y, z, a, b) = 0,$$

$$(3) \quad \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0.$$

Si l'on considère a, b, c comme des paramètres et x, y, z comme les coordonnées d'un point de l'espace, on peut dire que les équations (2) et (3) définissent la famille des caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles déterminée

$$(4) \quad F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Cette équation est dite l'équation aux dérivées partielles correspondante à l'équation $V = 0$. A chaque équation représentant les courbes intégrales de (1) correspond ainsi une équation aux dérivées partielles déterminée. Toutes ces équations aux dérivées partielles constituent un ensemble que j'appellerai (E). Or, pour obtenir toutes les formes distinctes que peut prendre l'équation du système des courbes intégrales, il suffit évidemment d'appliquer toutes les transformations ponctuelles

$$x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z)$$

aux paramètres x, y, z de l'équation (2); donc on obtient toutes les équations de l'ensemble (E) en appliquant à l'une quelconque d'entre elles toutes les transformations ponctuelles de l'espace.

Supposons que, parmi les équations de l'ensemble (E), on en choisisse une d'après une loi déterminée; cette équation pourra être prise pour représenter toute la famille E.

Nous voyons donc qu'à une équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

correspond une certaine famille d'équations différentielles du troisième

ordre

$$(2) \quad H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2b}{da^2}, \frac{d^3b}{da^3}\right) = 0,$$

et qu'inversement, à chaque équation différentielle de la forme (2) correspond une famille d'équations de la forme (1). Chacune de ces familles est complètement déterminée, quand on connaît un de ses membres.

Considérons l'équation aux dérivées partielles qui correspond à l'intégrale générale

$$V(x, y, z, a, b) = 0$$

de l'équation

$$H = 0.$$

Cette équation aux dérivées partielles a pour associée une équation

$$\Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

que l'on peut former de la manière suivante. Il suffit d'éliminer a, b, c entre les équations

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0$$

et les suivantes

$$dV = 0, \quad d\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right) + c d\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right) = 0,$$

où

$$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy + \frac{\partial}{\partial z} dz;$$

ceci revient à éliminer a et b entre les trois équations

$$V = 0, \quad dV = 0$$

et

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial a} & \frac{\partial V}{\partial b} \\ \frac{\partial}{\partial a}(dV) & \frac{\partial}{\partial b}(dV) \end{vmatrix} = 0;$$

on peut donc dire que l'équation $\Phi = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe intégrale

$$V(x, y, z, a, b) = 0$$

soit tangente à la courbe infiniment voisine

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = 0.$$

En particulier, supposons V de la forme

$$V = b - U(x, y, z, a) = 0;$$

dans ce cas l'équation $\Phi = 0$ exprime la condition pour que l'équation à une inconnue (a)

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = 0$$

ait une racine double.

Exemple. — Considérons l'équation différentielle

$$(1) \quad \frac{d^3 b}{da^3} = 0,$$

et prenons l'intégrale générale sous la forme

$$(2) \quad b = x + ay + a^2 z;$$

pour obtenir l'équation $\Phi = 0$, correspondante à l'équation (2), il suffit d'écrire que l'équation du deuxième degré

$$dx + a dy + a^2 dz = 0$$

a une racine double, ce qui donne

$$(3) \quad dy^2 - 4 dx dz = 0.$$

Cette équation peut prendre la forme

$$dy^2 + (dx - dz)^2 - (dx + dz)^2 = 0,$$

qui dérive, par une transformation ponctuelle évidente, de la forme

$$(4) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

On peut donc dire que la famille des équations aux dérivées partielles qui correspond à l'équation (1), est *représentée* (voir p. 15) par

T.

l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0$$

associée à l'équation (4).

4. Je terminerai ce Chapitre par une remarque relative aux caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles. Pour la commodité du langage, j'adopterai la définition suivante :

Soit T le cône élémentaire que l'équation

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

fait correspondre à un point quelconque m de l'espace et soit S une surface intégrale passant par m . Le plan tangent en m à la surface S touche le cône T suivant une certaine génératrice μ ; je dirai que l'élément linéaire (m, μ) est un élément *linéaire caractéristique* de la surface S.

Cette notion nous permet d'énoncer d'une façon concise une propriété bien connue des courbes caractéristiques de l'équation (1) :

Une courbe caractéristique, tracée sur une surface intégrale S, est une courbe dont chaque élément est un élément linéaire caractéristique de la surface S.

Supposons maintenant qu'on effectue une transformation ponctuelle quelconque

$$x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z) :$$

l'équation (1) se change en une autre

$$(2) \quad F'(x', y', z', p', q') = 0,$$

le point m en un point m' , la surface S en une surface intégrale S' de l'équation (2).

Cela posé, il résulte immédiatement d'une remarque, faite au Chapitre précédent, que :

1° Le cône élémentaire T a pour transformée le cône élémentaire T' que l'équation (2) fait correspondre au point m' ;

2° Les éléments linéaires caractéristiques de la surface S ont pour transformés les éléments linéaires caractéristiques de la surface S'.

De là on déduit le théorème suivant :

Lorsqu'on applique à tous les points de l'espace une transformation

ponctuelle quelconque

$$x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z),$$

les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

deviennent les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles transformée

$$F'(x', y', z', p', q') = 0.$$



CHAPITRE III.

GÉNÉRALITÉS SUR LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
QUI ADMETTENT UN GROUPE CONTINU DE TRANSFORMATIONS (1).

1. Avant d'aborder l'étude de ces équations, je rappellerai quelques propositions fondamentales dues à M. Sophus Lie.

On dit qu'une multiplicité M de points $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ admet une transformation ponctuelle

$$(1) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

si la multiplicité transformée M' est identique à la multiplicité M .

Pour que la multiplicité représentée par les équations

$$(2) \quad F_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - m$$

admette toutes les transformations du groupe G engendré par les r

(1) Les résultats indiqués dans les deux premiers paragraphes sont extraits de l'Ouvrage de M. Sophus Lie sur la théorie des groupes (*Transformationsgruppen*, t. I, p. 459 et suiv.). Les notions importantes exposées dans les paragraphes suivants sont également dues à M. Sophus Lie, mais se trouvent disséminées dans les nombreux Mémoires de l'illustre géomètre (*Arch. Norv.*).

transformations infinitésimales

$$X_i f = \sum_{j=1}^n \xi_{ij}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_j}, \quad i=1, 2, \dots, r,$$

il faut et il suffit que chacune des équations

$$X_i F_k = 0$$

soit une conséquence des équations (2); en d'autres termes, il faut et il suffit que la multiplicité (2) admette chacune des transformations infinitésimales du groupe G.

2. Considérons maintenant une famille de multiplicités dépendant de p paramètres *essentiels* $a_1, \dots, a_p$

$$(1) \quad F_k(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_p) = 0, \quad k=1, 2, \dots, n-m.$$

La condition pour que ces paramètres soient essentiels peut être exprimée par le théorème suivant :

Pour que les paramètres $a_1, a_2, \dots, a_p$ de la famille de multiplicités, représentée par les équations (1), soient des paramètres essentiels, il faut et il suffit que la multiplicité de points $(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_p)$ représentée par les équations (1) n'admette pas de transformation infinitésimale de la forme

$$A f = \sum_{i=1}^p A_i(a_1, \dots, a_p) \frac{\partial f}{\partial a_i},$$

La famille de multiplicités considérée admet la transformation ponctuelle

$$(2) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \quad i=1, 2, \dots, n$$

si le système d'équations (1) se change par cette transformation en un nouveau système représentant la même famille de multiplicités.

Supposons cette condition réalisée; alors on peut démontrer qu'à la transformation (2) correspond dans l'espace à $n+p$ dimensions une transformation ponctuelle

$$(2) \quad x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n),$$

$$(3) \quad a'_h = \psi_h(a_1, \dots, a_p)$$

qui laisse invariante la multiplicité de points $(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_p)$ représentée par les équations (1).

La position de chacune des multiplicités de la famille (1), étant déterminée par les paramètres $a_1, \dots, a_p$, on peut dire que les équations (3) indiquent la loi suivant laquelle la transformation (2) échange entre elles les multiplicités de la famille. Ces équations (3) définissent une transformation des paramètres $a_1, a_2, \dots, a_p$, que nous appellerons la transformation *conjuguée* de la transformation (2).

En particulier, supposons que la famille de multiplicités, représentée par les équations (1), admette toutes les transformations d'un groupe G. Dans ce cas, les transformations conjuguées de celles du groupe G forment également un groupe. On conclut de là que :

Pour que la famille de multiplicités représentée par les équations (1) admette un groupe de transformations, il faut et il suffit que la multiplicité de points $(x_1, \dots, x_n; a_1, \dots, a_p)$ définie par les mêmes équations admette un groupe de transformations de la forme

$$x'_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n), \quad a'_h = \psi_h(a_1, \dots, a_p), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad h = 1, 2, \dots, p,$$

c'est-à-dire un groupe engendré par des transformations infinitésimales de la forme

$$Xf = \sum_{i=1}^n \xi_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^p \alpha_h(a_1, \dots, a_p) \frac{\partial f}{\partial a_h}.$$

3. Cela posé, on dit que l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

admet la transformation ponctuelle

$$(2) \quad x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z)$$

ou que la transformation (2) laisse invariante l'équation (1), si cette dernière, considérée comme une équation à cinq variables indépendantes (x, y, z, p, q) admet la transformation prolongée de (2)

$$(3) \quad \begin{cases} x' = X(x, y, z), & y' = Y(x, y, z), & z' = Z(x, y, z), \\ p' = P(x, y, z, p, q), & q' = Q(x, y, z, p, q), \end{cases}$$

où p' et q' sont des fonctions de x, y, z, p, q définies par l'identité

$$dz' - p'dx' - q'dy' = p(dz - p dx - q dy).$$

En d'autres termes, l'équation (1) admet la transformation (2) si celle-ci, appliquée aux points de l'espace, a pour effet d'échanger entre eux les cônes élémentaires correspondant à l'équation (1) (Chap. I).

Il résulte d'un théorème démontré au Chapitre II que, si la transformation (2) laisse invariante l'équation (1), elle échange entre elles les caractéristiques de l'équation. Réciproquement, si la transformation (2) échange entre elles les caractéristiques de l'équation (1), elle laisse invariant l'ensemble des cônes élémentaires correspondant à l'équation (1) et, par suite, laisse invariante l'équation (1). On peut donc dire que :

Si l'équation (1) admet une transformation ponctuelle, l'ensemble des caractéristiques admet aussi cette transformation et réciproquement.

4. Pour reconnaître si l'équation (1) admet un groupe de transformations, il suffit de chercher s'il existe un groupe de transformations à cinq variables x, y, z, p, q et de la forme (3) qui laisse invariante la multiplicité de points (x, y, z, p, q) définie par l'équation (1).

A cet effet, on cherche à déterminer la transformation infinitésimale prolongée

$$A(f) = \xi(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z} + \varpi \frac{\partial f}{\partial p} + \chi \frac{\partial f}{\partial q} \quad (1),$$

de manière que l'équation

$$A(F) = 0$$

soit une conséquence de l'équation (1).

Il résulte de ce que nous venons de dire au sujet des cônes élémentaires correspondant à l'équation (1), que l'on peut aussi employer la méthode suivante :

On forme l'équation

$$(1') \quad \Phi(x, y, z, dx, dy, dz) = 0,$$

(1) Voir les valeurs de ϖ et χ , p. 6.

associée (voir p. 7) à l'équation (1) et l'on cherche les transformations ponctuelles prolongées

$$\begin{aligned}x' &= \mathbf{X}(x, y, z), & dx' &= \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial z} dz, \\y' &= \mathbf{Y}(x, y, z), & dy' &= \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial z} dz, \\z' &= \mathbf{Z}(x, y, z), & dz' &= \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial z} dz,\end{aligned}$$

qui laissent invariante la multiplicité de points (x, y, z, dx, dy, dz) définie par l'équation (1').

A cet effet, on détermine les transformations infinitésimales de la forme

$$\Lambda f = \xi(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial dx} + \mu \frac{\partial f}{\partial dy} + \nu \frac{\partial f}{\partial dz},$$

telles que l'équation

$$\Lambda \Phi = 0,$$

considérée comme une équation à six variables indépendantes x, y, z, dx, dy, dz , soit une conséquence de l'équation (1').

Exemple. — Proposons-nous de chercher le groupe de l'équation aux dérivées partielles associée à l'équation aux différentielles totales

$$(1) \quad \left(\frac{dy}{dx} \right)^n = \frac{dz}{dx},$$

où n est un nombre différent de

$$-1, \quad 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad 2.$$

Désignons par

$$\mathbf{X}f + \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial f}{\partial dx} + \mu \frac{\partial f}{\partial dy} + \nu \frac{\partial f}{\partial dz}$$

une transformation infinitésimale laissant invariante l'équation (1). Les équations qui déterminent ξ, η, ζ s'obtiennent en écrivant que l'équation

$$\frac{\nu}{dz} + \frac{\lambda(n-1)}{dx} = \frac{n\mu}{dy},$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz}{dz} + (n-1) \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz}{dx} \\ & = n \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz}{dy} \end{aligned} \right.$$

est une conséquence de l'équation (1).

Posons

$$\frac{dy}{dx} = \alpha;$$

la condition pour que l'équation (2) soit une conséquence de l'équation (1) est alors exprimée par l'identité en x, y, z, α ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha^n} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \alpha^n \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + (n-1) \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial y} + \alpha^n \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\ & = \frac{n}{\alpha} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} + \alpha^n \frac{\partial \eta}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \alpha^{-n} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \alpha^{1-n} + \left[\frac{\partial \zeta}{\partial z} + (n-1) \frac{\partial \xi}{\partial x} - n \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] + (n-1) \frac{\partial \xi}{\partial y} \alpha + (n-1) \frac{\partial \xi}{\partial z} \alpha^n \\ & = n \frac{\partial \eta}{\partial x} \alpha^{-1} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \alpha^{n-1}. \end{aligned}$$

Il résulte des hypothèses faites sur n que deux quelconques des exposants de α sont distincts; l'identité précédente exige donc que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (n-1) \frac{\partial \xi}{\partial x} - n \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

De là on déduit

$$\xi = ax + c_1, \quad \eta = a'y + c_2, \quad \zeta = a''z + c_3$$

avec

$$a'' - n(a' - a) - a = 0.$$

Si donc on pose

$$a' - a = b,$$

on trouve

$$\xi = ax + c_1, \quad \eta = (a + b)y + c_2, \quad \zeta = (a + nb)z + c_3.$$

L'équation proposée admet donc le groupe G défini par les cinq transformations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y} + nz \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Les transformations finies du groupe G sont données évidemment par les formules

$$x' = ax + c_1, \quad y' = aby + c_2, \quad z' = ab^n z + c_3.$$

L'application de la même méthode montre que, si n est égal à l'un des nombres $(-1, \frac{1}{2}, 2)$, l'équation considérée admet un groupe à dix paramètres et, si n est égal à 1 ou 0, l'équation admet un groupe infini. Plus loin nous trouverons ces derniers résultats plus rapidement.

5. Passons maintenant à la recherche des équations aux dérivées partielles qui admettent un groupe fini de transformations.

Remarquons d'abord qu'une équation linéaire

$$Pp + Qq = R,$$

admet forcément un groupe infini. En effet, cette équation admet dans tous les cas le groupe infini engendré par les transformations infinitésimales

$$\rho(x, y, z) \left(P \frac{\partial f}{\partial x} + Q \frac{\partial f}{\partial y} + R \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

où ρ désigne une fonction arbitraire. Les équations aux dérivées partielles que nous cherchons sont donc certainement des équations non linéaires.

Soit

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0$$

une équation aux dérivées partielles, non linéaire, admettant la transformation ponctuelle

$$(2) \quad x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z),$$

T.

et soient

$$(3) \quad V(x, y, z, a, b) = 0, \quad V' = \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0$$

les équations des caractéristiques.

On a vu (Chap. II) que l'ensemble des caractéristiques admet aussi la transformation (2) : donc la multiplicité de points (x, y, z, a, b, c) définie par les équations (3) admet une transformation ponctuelle de la forme

$$(2) \quad x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z),$$

$$(4) \quad a' = A(a, b, c), \quad b' = B(a, b, c), \quad c' = C(a, b, c).$$

En d'autres termes, le lieu des points (x', y', z', a', b', c') défini par les équations (2), (4) et (3) est identique à la multiplicité définie par les équations (3). Donc le système

$$(5) \quad V(x', y', z', a', b') = 0, \quad V'(x', y', z', a', b', c') = 0,$$

où (x', y', z', a', b', c') sont définies par les équations (2) et (4), est équivalent au système (3). Il résulte de là que le système (5), considéré comme un système d'équations entre les six variables

$$x, y, z, a', b', c',$$

est, pour les caractéristiques, un système d'équations normal (voir p. 13). Donc les fonctions a', b', c' de a, b, c satisfont à l'identité

$$db' - c' da' = \rho(db - c da).$$

Nous parvenons ainsi à ce résultat :

Si le système de courbes représenté par les équations

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0,$$

admet une transformation ponctuelle

$$(2) \quad x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z),$$

la transformation conjuguée

$$(4) \quad a' = A(a, b, c), \quad b' = B(a, b, c), \quad c' = C(a, b, c),$$

considérée comme échangeant les éléments linéaires (a, b, c) d'un plan, est une transformation de contact.

Cela posé, considérons dans les équations (3) x, y, z comme des paramètres, et a, b, c comme les coordonnées d'un point de l'espace. Ces équations définissent alors une famille de courbes T qui admet la transformation (4).

A chaque point (a, b, c) faisons maintenant correspondre dans le plan des (a, b) l'élément linéaire (a, b, c) ; aux points d'une courbe T correspondent les éléments linéaires unis suivant la courbe (t) , projection de T sur le plan des points $(a, b, 0)$. On peut donc dire que :

La famille des courbes (t) admet la transformation de contact (4).

Or les courbes (t) sont précisément les courbes intégrales de l'équation

$$(6) \quad \mathbf{H}\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2b}{da^2}, \frac{d^3b}{da^3}\right) = 0,$$

que nous avons fait correspondre au système (3). Donc l'équation différentielle (6) admet une transformation de contact. Réciproquement, si l'équation (6) admet une transformation de contact, la famille des caractéristiques et, par suite, l'équation (1) admet une transformation ponctuelle. Pour démontrer cette réciproque, il suffit de reprendre les raisonnements précédents en sens inverse. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'équation aux dérivées partielles*

$$(1) \quad \mathbf{F}(x, y, z, p, q) = 0$$

admet une transformation ponctuelle, chacune des équations différentielles

$$(2) \quad \mathbf{H}\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2b}{da^2}, \frac{d^3b}{da^3}\right) = 0$$

qui lui correspondent admet une transformation de contact. Réciproquement, si une équation de la forme (2) admet une transformation de contact, chacune des équations (1) qui lui correspondent admet une transformation ponctuelle.

Plus généralement :

Si une équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \mathbf{F}(x, y, z, p, q) = 0$$

admet un groupe à r paramètres essentiels, chacune des équations

$$H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2b}{da^2}, \frac{d^3b}{da^3}\right) = 0$$

qui lui correspondent admet un groupe de transformations de contact également à r paramètres essentiels, et réciproquement.

En effet, soient

$$(3) \quad V(x, y, z, a, b) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a} + c \frac{\partial V}{\partial b} = 0$$

les équations des caractéristiques de l'équation (1). Supposons que le système (3) admette toutes les transformations d'un groupe G et désignons par Γ le groupe en a, b, c , conjugué du groupe G . Je dis que ces deux groupes ont le même nombre de paramètres essentiels ou, ce qui revient au même, que le nombre de transformations infinitésimales indépendantes est le même dans chacun des groupes. La démonstration est fondée sur la remarque suivante :

Soient Xf et Af

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}, \quad Af = \alpha \frac{\partial f}{\partial a} + \beta \frac{\partial f}{\partial b} + \gamma \frac{\partial f}{\partial c}$$

deux transformations infinitésimales conjuguées; ou bien ces deux transformations sont nulles identiquement, c'est-à-dire

$$\xi = \eta = \zeta = \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

ou bien aucune des deux transformations n'est nulle identiquement.

En effet, le système (3) admet par hypothèse la transformation infinitésimale

$$Xf + Af;$$

cette dernière ne peut se réduire à Af , car alors les paramètres a, b, c ne seraient pas essentiels (voir p. 20). Elle ne peut non plus se réduire à Xf , car alors la transformation infinitésimale Xf laisserait invariante chacune des caractéristiques de l'équation (1); par suite, les caractéristiques seraient toutes des courbes intégrales de

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}$$

et ne dépendraient donc que de deux paramètres arbitraires, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Cela posé, en s'appuyant sur la remarque précédente et en observant en outre que les deux transformations infinitésimales

$$e_1 X_1 f + e_2 X_2 f + \dots + e_r X_r f, \quad e_1 A_1 f + e_2 A_2 f + \dots + e_r A_r f \quad (1)$$

sont conjuguées, on voit immédiatement :

1° Que si r transformations infinitésimales de l'un des groupes sont indépendantes, les r transformations conjuguées sont aussi indépendantes;

2° Que si r transformations infinitésimales de l'un des groupes ne sont pas indépendantes, les r transformations infinitésimales conjuguées ne sont pas non plus indépendantes.

Le théorème proposé est donc démontré.

Nous voyons donc que la recherche des équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui admettent un groupe fini de transformations (ponctuelles) peut être ramené à la recherche des équations différentielles du troisième ordre

$$(2) \quad H\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2 b}{da^2}, \frac{d^3 b}{da^3}\right) = 0,$$

qui admettent un groupe fini de transformations de contact. Ayant déterminé ces dernières, on en déduit les premières au moyen de la règle déjà donnée (p. 16). Ce problème une fois résolu, on connaîtra toutes les équations de la forme (1) qui admettent un groupe de transformations. En effet, M. Sophus Lie a démontré qu'une équation, telle que (2), ne peut admettre un groupe infini de transformations de contact; donc, une équation de la forme (1) (non linéaire) ne peut admettre un groupe infini de transformations ponctuelles. D'autre part, comme je l'ai déjà indiqué dans la préface, nous nous bornerons à déterminer les équations qui admettent un groupe à plus de trois paramètres.

(1) Les symboles $X_i f$ et $A_i f$ désignent deux transformées conjuguées; les coefficients $e_1, e_2, \dots, e_r$ sont des constantes.



CHAPITRE IV.

RECHERCHE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU TROISIÈME ORDRE

$$H(x, y, y', y'', y''') = 0$$

QUI ADMETTENT UN GROUPE DE TRANSFORMATIONS DE CONTACT.

1. Le groupe des transformations de contact qu'admet une équation différentielle du troisième ordre

$$H(x, y, y', y'', y''') = 0$$

étant forcément fini, il suffit, pour résoudre le problème actuel, de considérer successivement tous les groupes finis de transformations de contact du plan et de chercher les équations différentielles du troisième ordre, que chacun d'eux laisse invariantes. A la vérité, ces groupes sont en nombre infini, mais on sait qu'ils dérivent tous, par une transformation de contact, d'un petit nombre d'entre eux, appelés *groupes canoniques*. Tout revient donc à déterminer les équations du troisième ordre, invariantes qui correspondent aux groupes canoniques. En appliquant à ces équations toutes les transformations de contact du plan, on obtient toutes les équations cherchées.

Les groupes canoniques se partagent, comme on sait ⁽¹⁾, en deux catégories : la première comprend les groupes dits *irréductibles*, la seconde se compose de tous les groupes ponctuels *prolongés*.

Les groupes irréductibles sont au nombre de trois ; le premier a dix paramètres, le second sept et le troisième six. Désignons-les respectivement par G_{10} , G_7 , G_6 . Les fonctions caractéristiques des transformations infinitésimales de G_{10} sont les suivantes :

$$\begin{aligned} W_1 = 1, \quad W_2 = x, \quad W_3 = y', \quad W_4 = x^2, \quad W_5 = xy', \quad W_6 = y'^2, \quad W_7 = y - \frac{1}{2}xy', \\ W_8 = x(y - \frac{1}{2}xy'), \quad W_9 = y'(y - \frac{1}{2}xy'), \quad W_{10} = (y - \frac{1}{2}xy')^2. \end{aligned}$$

En prenant seulement les six premières fonctions, on obtient celles qui appartiennent à G_6 ; enfin, les sept premières sont celles de G_7 .

Passons aux groupes ponctuels prolongés.

(1) *Transformationsgruppen*, t. I, Chap. XXIII.

Je commencerai par rappeler le principe qui a guidé M. Sophus Lie dans le choix de leurs formes canoniques.

D'abord, on sait qu'un groupe à une variable x ne peut contenir qu'un, deux ou trois paramètres.

Dans le premier cas, il est semblable au groupe

$$x' = x + a,$$

engendré par la transformation infinitésimale

$$X_1 f = \frac{df}{dx};$$

dans le second cas, il est semblable au groupe

$$x' = ax + b,$$

défini par les transformations infinitésimales

$$X_1 f = \frac{df}{dx}, \quad X_2 f = x \frac{df}{dx};$$

enfin, dans le troisième cas, il est semblable au groupe

$$x' = \frac{ax + b}{x + c},$$

dont les transformations infinitésimales sont

$$X_1 f = \frac{df}{dx}, \quad X_2 f = x \frac{df}{dx}, \quad X_3 f = x^2 \frac{df}{dx}.$$

M. Sophus Lie partage les groupes ponctuels du plan en deux classes : la première comprend tous les groupes qui ne laissent invariante aucune famille de courbes à un paramètre

$$(1) \quad \varphi(x, y) = a,$$

la seconde comprend tous les autres groupes.

La seconde classe se subdivise elle-même en plusieurs catégories. Considérons en effet un groupe G laissant invariante la famille de courbes (1). Le groupe à une variable a , que nous avons appelé le groupe conjugué de G , et qui indique la loi suivant laquelle les transformations de G échan- gent les courbes de la famille, peut contenir 0, 1, 2, 3 paramètres (dans le premier

cas, il se réduit à la transformation identique). De là quatre catégories de groupes de seconde classe.

Groupes ponctuels de la première classe. — Ces groupes sont tous semblables à trois groupes homographiques G_1 , G_2 et G_3 .

$G_1.$	$G_2.$	$G_3.$
$x' = ax + by + c,$	$x' = ax + by + c,$	$x' = \frac{ax + by + c}{1 + px + qy},$
$y' = a'x + b'y + c',$	$y' = a'x + b'y + c'.$	$y' = \frac{a'x + b'y + c'}{1 + px + qy}.$
$ab' - ba' = 1.$		

Le groupe à cinq paramètres G_1 est engendré par les transformations infinitésimales

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_4 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5 f = y \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Le groupe à six paramètres G_2 est engendré par

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_4 f = x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5 f = y \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_6 f = y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Enfin, le groupe à huit paramètres G_3 est engendré par six transformations infinitésimales du groupe G_2 et les deux suivantes

$$X_7 f = x \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad X_8 f = y \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Les groupes G_1 , G_2 , G_3 sont les groupes canoniques de la première classe.

Groupes ponctuels de la seconde classe. — Par un changement de variables convenable, on peut toujours transformer un groupe ponctuel de la seconde classe en un groupe semblable G laissant invariante la famille des droites parallèles à l'axe des y

$$(1) \quad x = a;$$

les transformations infinitésimales du groupe prennent alors la forme

$$X_k f = \xi_k(x) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

et il est aisé de voir que les transformations infinitésimales réduites

$$X'_k f = \xi(x) \frac{\partial f}{\partial x}$$

définissent elles-mêmes un groupe, qui est précisément le groupe conjugué de G. D'après ce que l'on a vu sur les groupes à une variable, on peut, par un changement de variable de la forme

$$x' = \varphi(x), \quad y' = y,$$

transformer le groupe G en un groupe semblable engendré par des transformations infinitésimales de la forme

$$X_k f = (a + bx + cx^2) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

On est donc conduit à prendre pour formes canoniques des groupes de la seconde classe les formes suivantes :

Première catégorie.

$$X_k f = \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$k = 1, 2, \dots, r.$$

Deuxième catégorie.

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + \theta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_k f = \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$k = 2, 3, \dots, r.$$

Troisième catégorie.

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_1(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_2 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_2(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

.....

$$X_k f = \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$k = 3, 4, \dots, r.$$

Quatrième catégorie.

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_1(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_2 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_2(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_3 f = x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + \theta_3(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

.....

$$X_k f = \eta_k(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$k = 4, 5, \dots, r.$$

En calculant les fonctions $\theta(x, y)$ et $\eta(x, y)$ de manière à vérifier les identités

$$(X_i X_k) = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_r X_r, \quad i, k = 1, 2, \dots, r,$$

T.

M. Sophus Lie est parvenu à donner aux formes canoniques des groupes de la seconde classe les formes simples qui suivent.

Tableau des groupes ponctuels de la seconde classe.

Première catégorie.

$$\begin{array}{ll} 1. & \frac{\partial f}{\partial y}, \quad 2. \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y^2 \frac{\partial f}{\partial y}. \\ 3. & \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \varphi_i(x) \frac{\partial f}{\partial y} \text{ (1)}. \quad 4. \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \varphi_i(x) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}. \\ & i = 1, 2, \dots, r. \quad i = 1, 2, \dots, r. \end{array}$$

Deuxième catégorie.

$$\begin{array}{ll} 5. & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad P_i(x) \frac{\partial f}{\partial y}. \quad 6. \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_i(x) \frac{\partial f}{\partial y}. \\ & i = 1, 2, \dots, r. \quad i = 1, 2, \dots, r. \\ 7. & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y^2 \frac{\partial f}{\partial y}. \end{array}$$

Les fonctions $P_i(x)$ constituent un système d'intégrales de l'équation différentielle à coefficients constants

$$a_0 \frac{d^r y}{dx^r} + a_1 \frac{d^{r-1} y}{dx^{r-1}} + \dots + a_{r-1} \frac{dy}{dx} + a_r y = 0.$$

Troisième catégorie.

$$\begin{array}{ll} 8. & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}. \\ 9. & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}. \\ 10. & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y^2 \frac{\partial f}{\partial y}. \\ 11. & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + m y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \dots, \quad x^r \frac{\partial f}{\partial y} \text{ (2)}. \\ 12. & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + (x^r + r y) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \dots, \quad x^{r-1} \frac{\partial f}{\partial y}. \\ 13. & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \dots, \quad x^r \frac{\partial f}{\partial y}. \end{array}$$

(1) φ_i désigne une fonction arbitraire de x .

(2) m désigne une constante arbitraire.

Quatrième catégorie.

14. $\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x}.$
15. $\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y^2 \frac{\partial f}{\partial y}.$
16. $\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2xy \frac{\partial f}{\partial y}.$
17. $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y}.$
18. $\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}.$
19. $\frac{\partial f}{\partial x}, \quad 2x \frac{\partial f}{\partial x} + ry \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + rxy \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \dots, \quad x^r \frac{\partial f}{\partial y}.$
20. $\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + rxy \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \dots, \quad x^r \frac{\partial f}{\partial y}.$

Cherchons maintenant les équations différentielles du troisième ordre qui admettent un groupe de transformations ponctuelles. Les seuls groupes à considérer sont ceux de la seconde classe, car les autres ne laissent invariante aucune équation différentielle du troisième ordre.

En appliquant la méthode générale donnée par M. Sophus Lie (1), on trouve facilement que les seuls groupes contenant plus de *cinq* paramètres, qui laissent une équation du troisième ordre invariante, sont les suivants

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \\ & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \\ & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2xy \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \\ & \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + 2xy \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Chacun des trois premiers groupes ne laisse invariante qu'une seule équation du troisième ordre, à savoir l'équation

$$((1)) \quad y''' = 0.$$

(1) SOPHUS LIE, *Mathematische Annalen*, t. XXXII, p. 213.

Le quatrième groupe laisse invariante l'équation

$$((1')) \quad 2y'y''' - 3y''^2 = 0,$$

dont les courbes intégrales ont pour équations

$$xy + ax + bx + c = 0.$$

Nous verrons plus loin que, en appliquant à ces hyperboles une transformation de contact convenable, on peut les transformer en paraboles, à savoir les paraboles représentées par

$$y = a' + b'x + c'x^2 \quad (1).$$

Nous pourrions alors énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute équation différentielle du troisième ordre*

$$H(x, y, y', y'', y''') = 0$$

qui admet un groupe de transformations de contact, à plus de cinq paramètres, dérive, par une transformation de contact, de l'équation

$$y''' = 0.$$

Reste à déterminer les équations du troisième ordre qui admettent un groupe à moins de six paramètres.

Équations qui admettent un groupe ponctuel contenant cinq paramètres.

1. Les groupes à cinq paramètres appartenant à la première catégorie ne laissent invariante aucune équation différentielle du troisième ordre.

2. Considérons donc les groupes à cinq paramètres appartenant à la seconde catégorie. A la première forme canonique ne correspond aucune équation du troisième ordre invariante. Il n'en est pas de même de la forme

$$(G) \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_1(x) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_2(x) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_3(x) \frac{\partial f}{\partial y},$$

où P_1, P_2, P_3 constituent un système d'intégrales de l'équation

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0.$$

Premier cas. — L'équation caractéristique a trois racines simples (α, β, γ) .

(1) SOPHUS LIE, *Transformationsgruppen*, t. II, p. 441.

Le groupe G prend alors la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\alpha x} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\beta x} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\gamma x} \frac{\partial f}{\partial y};$$

effectuant le changement de variables défini par

$$x' = e^{(\beta-\alpha)x}, \quad y' = ye^{-\alpha x},$$

on trouve que le groupe G est semblable au suivant

$$x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^n \frac{\partial f}{\partial y},$$

qui peut alors être pris comme groupe canonique.

Ce groupe laisse invariante une équation du troisième ordre, et une seule, à savoir l'équation

$$((2)) \quad xy''' - (n-2)y'' = 0,$$

qui a pour courbes intégrales les courbes représentées par

$$y = a + bx + cx^n.$$

Deuxième cas. — L'équation caractéristique a une racine double.

Le groupe devient

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\alpha x} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad xe^{\alpha x} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{\beta x} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Comme dans le cas précédent, on trouve facilement que ce groupe est semblable au suivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^x \frac{\partial f}{\partial y},$$

que nous prendrons comme groupe canonique. L'équation du troisième ordre invariante est ici

$$((3)) \quad y''' - y'' = 0;$$

les courbes intégrales sont représentées par

$$y = a + bx + ce^x.$$

Troisième cas. — L'équation caractéristique a une racine triple.

Le groupe devient

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^{ax} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x e^{ax} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 e^{ax} \frac{\partial f}{\partial y};$$

il est, dans tous les cas, semblable au suivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}$$

qui ne laisse invariante que l'équation

$$y''' = 0.$$

3. Examinons maintenant les groupes à cinq paramètres appartenant à la troisième catégorie.

Le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y^2 \frac{\partial f}{\partial y}$$

laisse invariante une équation du troisième ordre, et une seule, à savoir l'équation déjà trouvée

$$((1')) \quad 2y'y''' - 3y''^2 = 0.$$

Les groupes

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + my \frac{\partial f}{\partial y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

ne fournissent pas non plus d'équation du troisième ordre nouvelle, car ils ne laissent invariante que l'équation

$$((1)) \quad y''' = 0.$$

Quant au groupe

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + (3y^2 + x^3) \frac{\partial f}{\partial y},$$

il ne laisse pas d'équation du troisième ordre invariante.

4. Reste à examiner les groupes à cinq paramètres de la quatrième catégorie.

Le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad 2x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}$$

ne laisse pas d'équation du troisième ordre invariante.

Le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

est semblable au groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y^2 \frac{\partial f}{\partial y}$$

qui a déjà été étudié.

En résumé, les équations invariantes

$$H(x, y, y', y'', y''') = 0,$$

qui correspondent aux groupes canoniques à cinq paramètres, sont, d'une part, les équations déjà trouvées ((1)) et ((1')), d'autre part, les deux équations

$$((2)) \quad xy''' - (n-2)y'' = 0,$$

$$((3)) \quad y''' - y'' = 0.$$

Nous verrons plus tard que ces équations ne peuvent admettre un groupe de transformations de contact à plus de cinq paramètres (1).

Remarquons, d'ailleurs, que l'équation ((2)) est l'équation différentielle des courbes

$$y = a + bx + cx^n;$$

l'équation ((3)) est l'équation différentielle des suivantes

$$y = a + bx + ce^x.$$

Équations qui admettent un groupe ponctuel de quatre paramètres.

1. Considérons d'abord les groupes à quatre paramètres de la première catégorie.

(1) Pourvu que $n \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$.

Le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \varphi(x) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \psi(x) \frac{\partial f}{\partial y}$$

ne laisse invariante aucune équation différentielle du troisième ordre.

Le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \varphi(x) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}$$

laisse invariante une équation du troisième ordre, et une seule, à savoir

$$((4)) \quad \frac{y'''}{y''} = \frac{\varphi'''(x)}{\varphi''(x)},$$

qui a pour courbes intégrales les courbes représentées par

$$y = a + bx + c\varphi(x).$$

2. Passons aux groupes de la deuxième catégorie. Le premier de ces groupes est le suivant

$$(G) \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad P_1(x) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_2(x) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_3(x) \frac{\partial f}{\partial y},$$

où P_1, P_2, P_3 constituent un système d'intégrales de l'équation

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0.$$

Comme précédemment, on trouve aisément que ce groupe est semblable à

$$(G_1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + m y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^n \frac{\partial f}{\partial y},$$

si l'équation caractéristique a trois racines simples; à

$$(G_2) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad e^x \frac{\partial f}{\partial y},$$

si l'équation caractéristique a une racine double; ou enfin, à

$$(G_3) \quad \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

ou

$$(G'_3) \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial y},$$

si l'équation caractéristique a une racine triple.

(a) Le groupe G_1 laisse invariante une équation du troisième ordre de la forme

$$(1) \quad xy''' - (n-2)y'' = \varphi(x),$$

dont les courbes intégrales sont représentées par

$$(2) \quad y = ax^n + bx + c + \psi(x),$$

$\psi(x)$ étant une intégrale particulière de l'équation (1).

Si, dans l'équation (2), on remplace y par $y + \psi(x)$, elle devient

$$y = a + bx + cx^n,$$

qui représente les courbes intégrales de l'équation

$$((2)) \quad xy''' - (n-2)y'' = 0.$$

L'équation différentielle considérée dérive donc, par une transformation ponctuelle, de l'équation canonique ((2)).

(b) Le groupe G_2 laisse invariante l'équation

$$(1) \quad y''' - y'' = k,$$

qui dérive aussi de l'équation canonique

$$((3)) \quad y''' - y'' = 0,$$

par une transformation ponctuelle; il suffit, en effet, de remplacer dans (1) y par $y + \varphi(x)$, $\varphi(x)$ étant une intégrale de l'équation (1), pour obtenir l'équation canonique ((3)).

(c) Enfin le groupe G_3 laisse invariante toute équation de la forme

$$y''' = ke^x, \quad k = \text{const.}$$

et le groupe G_3 les équations de la forme

$$y''' = k;$$

chacune de ces équations dérive évidemment de l'équation canonique ((1))

par une transformation ponctuelle de la forme

$$x' = x, \quad y' = y + \varphi(x).$$

Le groupe G ne fournit donc, dans aucun cas, de forme canonique nouvelle.

(d) Il en est de même du groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y^2 \frac{\partial f}{\partial y};$$

en effet, ce groupe laisse invariante les équations du troisième ordre comprises dans la formule

$$\frac{3y''^2 - 2y'y'''}{y'^2} = m^2.$$

Si l'on effectue le changement de variables suivant

$$x_1 = e^{mx},$$

l'équation précédente prend la forme ((1')),

$$3y''^2 - 2y'y''' = 0.$$

(e) Reste à examiner le groupe

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_1(x) \frac{\partial f}{\partial y}, \quad P_2(x) \frac{\partial f}{\partial y}$$

où $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont les intégrales de

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Supposons d'abord que les racines de l'équation caractéristique soient distinctes. Le groupe est alors semblable au suivant

$$x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y},$$

qui ne laisse invariante que les équations canoniques

$$((2)) \quad xy''' - (n-2)y'' = 0,$$

Supposons maintenant que l'équation caractéristique ait ses racines

égales. Le groupe est alors semblable à celui-là

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y};$$

les équations invariantes qui lui correspondent sont données par la formule

$$y''' - ky'' = 0;$$

chacune de ces équations dérive par une transformation ponctuelle ($x_1 = kx$) de l'équation canonique

$$((3)) \quad y''' - y'' = 0.$$

Le groupe considéré G ne fournit donc pas de forme canonique nouvelle.

3. Les groupes à quatre paramètres de la troisième catégorie sont au nombre de trois.

(a) Considérons d'abord le premier

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + my \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Si $m = 2$, le groupe ne laisse invariante que l'équation canonique déjà obtenue

$$y''' = 0.$$

Si $m \neq 2$, il y a une infinité d'équations invariantes, à savoir celles qui sont données par la formule

$$(1) \quad y''' = ky''^p, \quad p = \frac{m-3}{m-2},$$

où k désigne une constante.

Il est aisé de voir que, pour une valeur donnée de m , ces équations dérivent toutes (sauf l'équation $y''' = 0$ qui correspond à $k = 0$) de l'une d'entre elles,

$$(2) \quad y''' = hy''^p, \quad h \neq 0$$

par une transformation ponctuelle. En effet, il suffit, pour passer de l'équa-

tion (1) à l'équation (2), de remplacer y par λy , λ étant déterminé par

$$\lambda = \left(\frac{h}{k}\right)^{\frac{1}{p-1}} = \left(\frac{h}{k}\right)^{m-2}.$$

Dans la suite nous prendrons

$$h = m - 2.$$

Remarquons, dès maintenant, que l'équation (2) dérive, dans le cas où

$$m = 3,$$

de l'équation canonique

$$y''' = 0,$$

par une transformation ponctuelle (*voir* page 41).

(b) Le second groupe à examiner est le suivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y} + \left(\frac{x^2}{2} + 2y\right) \frac{\partial f}{\partial y};$$

à ce groupe correspond une infinité d'équations du troisième ordre invariantes, à savoir les équations de la forme

$$(1) \quad y''' e^{y''} = k,$$

où k désigne une constante quelconque. Chacune de ces équations dérive, par une transformation ponctuelle, de l'équation

$$y''' e^{y''} = 1;$$

il suffit, pour le voir, de remplacer dans l'équation (1) y par $y + \frac{1}{2}x^2 Lk$.

(c) Le dernier groupe à quatre paramètres de la troisième catégorie est

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ce groupe laisse invariantes les équations du troisième ordre, qui ont la forme

$$y' y''' = m y''^2,$$

m désignant une constante.

4. Enfin le seul groupe à quatre paramètres de la dernière catégorie est le suivant

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Ce groupe laisse invariantes les équations différentielles du troisième ordre qui ont la forme

$$yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^{\frac{3}{2}},$$

où k désigne une constante quelconque.

En résumé, nous venons de trouver que les équations du troisième ordre suivantes

$$y''' \varphi''(x) - y'' \varphi'''(x) = 0,$$

$$y''' = ky''^p,$$

$$y''' e^{y''} = 1,$$

$$y' y''' = m y''^2,$$

$$yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^{\frac{3}{2}}$$

et celles qui en dérivent par une transformation de contact admettent un groupe ponctuel à quatre paramètres.

Nous verrons dans la suite que la quatrième équation et celles qui en dérivent admettent un groupe de transformations de contact à *cinq* paramètres.

De même la deuxième équation admet un groupe à plus de quatre paramètres si

$$p = 0, \quad p = 1, \quad p = 2 \quad \text{ou} \quad p = 3.$$

Nous pourrions alors dire que les formes canoniques des équations du troisième ordre, qui admettent un groupe à *quatre* paramètres, sans admettre un groupe d'ordre plus élevé, sont

$$((4)) \quad y''' \varphi''(x) - y'' \varphi'''(x) = 0,$$

$$((5)) \quad y''' = ky''^p, \quad p \neq 0, 1, 2, 3, \quad k \neq 0,$$

$$((6)) \quad y''' e^{y''} = 1,$$

$$((7)) \quad yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^{\frac{3}{2}}, \quad k \neq 0.$$



SECONDE PARTIE.

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE A DIX PARAMÈTRES.

La correspondance établie par M. Sophus Lie entre les équations aux dérivées partielles

$$(1) \quad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

qui admettent un groupe de transformations ponctuelles, et les équations différentielles ordinaires

$$(2) \quad H(x, y, y', y'', y''') = 0,$$

qui admettent un groupe de transformations de contact, nous a permis de ramener le problème proposé à la recherche des équations aux dérivées partielles qui correspondent aux équations canoniques (2), déterminées dans la première Partie de ce travail. Comme je l'ai déjà énoncé, je supposerai une équation aux dérivées partielles définie par son équation associée. Grâce à l'introduction dans le calcul de cette équation aux différentielles totales, il deviendra souvent facile d'apercevoir que deux équations aux dérivées partielles sont semblables et de trouver les changements de variables qui permettent de transformer l'une dans l'autre.

1. Équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique

$$((1)) \quad y''' = 0.$$

Nous avons déjà vu que ces équations sont les équations aux dérivées partielles qui dérivent, par une transformation ponctuelle, de l'équation

$$1 + p^2 + q^2 = 0,$$

dont l'équation associée est

$$(I) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Le groupe de cette équation est précisément le groupe des transformations conformes (1).

2. Équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique

$$(1') \quad 2y'y''' - 3y''^2 = 0.$$

Cette équation étant l'équation différentielle des hyperboles, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de coordonnées, dérive par une transformation ponctuelle de l'équation

$$(2) \quad (1 + y'^2)y''' - 3yy''^2 = 0,$$

qui a pour intégrales tous les cercles du plan

$$(3) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + c^2 = 0.$$

Tout revient donc à chercher les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation (2).

En exprimant que la droite (*voir* p. 16)

$$(x - a)da + (y - b)db - cdc = 0$$

est tangente au cercle (3), on trouve

$$da^2 + db^2 + dc^2 = 0.$$

La famille des équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation (1') est donc la même que celle qui correspond à l'équation canonique

$$y''' = 0,$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Toute équation aux dérivées partielles*

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

(1) *Transformationsgruppen*, II^e Volume, page 459.

qui admet un groupe de transformations à plus de cinq paramètres dérive, par une transformation ponctuelle, de l'équation

$$(1) \quad 1 + p^2 + q^2 = 0,$$

et admet, par conséquent, un groupe de transformations à dix paramètres.

COROLLAIRE. — Toute équation différentielle

$$H(x, y, y', y'', y''') = 0,$$

qui admet un groupe de transformations de contact à plus de cinq paramètres admet également un groupe de transformations à dix paramètres et dérive de l'équation

$$y''' = 0,$$

par une transformation de contact.

3. Transformations de contact par lesquelles les coniques, ayant deux points communs, se changent en coniques tangentes à une droite donnée en un point donné. — Proposons-nous de déterminer une transformation de contact permettant de passer de l'équation

$$(1 + y'^2)y''' - 3yy''^2 = 0$$

à l'équation

$$y''' = 0,$$

ou, ce qui revient au même, de la famille des cercles

$$(1) \quad (x - a')^2 + (y - b')^2 + c'^2 = 0$$

à la famille de paraboles

$$(2) \quad y = a + bx + cx^2.$$

Appliquons d'abord, à l'équation (1), la transformation particulière

$$a' = i(a + c), \quad b' = b, \quad c' = a - c,$$

qui transforme l'équation correspondante à (1),

$$da'^2 + db'^2 + dc'^2 = 0,$$

dans la suivante

$$db^2 - 4da\,dc = 0,$$

qui correspond à l'équation (2). La famille des cercles est alors représentée par

$$[x - i(a + c)]^2 + (y - b)^2 + (a - c)^2 = 0;$$

il ne reste plus qu'à résoudre le problème suivant, qui est complètement déterminé :

Déterminer la transformation de contact

$$x' = X(x, y, z), \quad y' = Y(x, y, z), \quad z' = Z(x, y, z)$$

qui fait correspondre, à la famille des éléments linéaires représentée par

$$(3) \quad \begin{cases} [x' - i(a + c)]^2 + (y' - b)^2 + (a - c)^2 = 0, \\ x' - i(a + c) + z'(y' - b) = 0, \end{cases}$$

la famille suivante

$$(4) \quad y = a + bx + cx^2, \quad z = b + 2cx.$$

Pour résoudre ce problème, remarquons que le système (3) peut prendre la forme suivante

$$(3') \quad \begin{cases} 2ia + ub = x' + uy', & u \\ 2ic + vb = x' + vy', & v \end{cases} = z' \pm \sqrt{z'^2 + 1},$$

obtenue en résolvant le système (3) par rapport à a et c .

De même, le système (4) peut prendre la forme

$$(4') \quad \begin{cases} 2a + bx = 2y - zx, \\ 2cx + b = z. \end{cases}$$

Les systèmes (3') et (4') doivent évidemment représenter la même multiplicité de points (x, y, z, a, b, c) ; donc on doit avoir

$$\frac{x' + uy'}{2y - zx} = \frac{u}{x} = i, \quad \frac{x' + vy'}{z} = v = \frac{i}{x};$$

T.

ces quatre équations se réduisent aux trois suivantes

$$x' + u y' = i(2y - zx),$$

$$x' + v y' = vz,$$

$$u = ix,$$

qui, résolues par rapport à x, y, z , donnent

$$x = -iu,$$

$$iy = u(y' - z'x') \quad \text{avec} \quad u^2 - 2uz' - 1 = 0,$$

$$z = y' - ux'.$$

Il est aisé de voir que ces équations définissent une transformation de contact. C'est la transformation cherchée. Désignons-la par T. La transformation de contact la plus générale, par laquelle la famille de paraboles

$$y = a + bx + cx^2$$

devient la famille des cercles du plan, est représentée par le symbole ST, où S désigne la transformation de contact la plus générale, qui laisse invariante l'équation $y''' = 0$ (*Transformationsgruppen*, t. II, p. 439).

Cela posé, considérons l'ensemble H des coniques ayant deux points communs A et B, et l'ensemble K des coniques tangentes à une droite D en un point C. Pour faire correspondre la famille H à la famille K, par une transformation de contact, il suffit d'appliquer à la famille K la transformation de contact (USTV), où U et V sont définies ainsi : U désigne une transformation homographique faisant correspondre à K la famille des paraboles déjà considérée ; V désigne une transformation homographique faisant correspondre la famille H à la famille des cercles du plan.



CHAPITRE II.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE
A CINQ PARAMÈTRES.

1. Cherchons d'abord les équations aux dérivées partielles qui correspondent à la forme canonique

$$((2)) \quad xy''' - (n-2)y'' = 0, \quad n \neq 0, 1, \frac{3}{2}, 2, -1.$$

Les courbes intégrales de cette équation peuvent être représentées par l'équation

$$y = a \left(1 - \frac{1}{n} \right) - bx + c \frac{x^n}{n}.$$

Comme précédemment, écrivons que l'équation en x

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right) da - x db + \frac{x^n}{n} dc = 0$$

a une racine double; il suffit, pour cela, d'éliminer x entre l'équation précédente et la suivante (voir p. 17)

$$db - x^{n-1} dc = 0;$$

on trouve ainsi

$$\frac{dc}{da} = \left(\frac{db}{da} \right)^n.$$

Les équations aux dérivées partielles cherchées sont donc toutes semblables à celle dont la forme associée est

$$(II) \quad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^n.$$

Groupe de l'équation (II). — Par son origine même, la famille de courbes

$$\varphi(x, y, a, b, c) = y - a \left(1 - \frac{1}{n} \right) + bx - c \frac{x^n}{n} = 0$$

admet le groupe G défini par les transformations infinitésimales

$$(G) \quad X_1 f = x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_4 f = x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5 f = x^n \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Proposons-nous de déterminer le groupe conjugué (p. 21) du groupe précédent. Nous devons, pour cela, déterminer les transformations infinitésimales de la forme

$$X'_i f = X_i f + A_i(a, b, c) \frac{\partial f}{\partial a} + B_i(a, b, c) \frac{\partial f}{\partial b} + C_i(a, b, c) \frac{\partial f}{\partial c},$$

qu'admet la multiplicité de points (x, y, a, b, c) définie par l'équation

$$\varphi(x, y, a, b, c) = 0.$$

Les équations qui déterminent A_i, B_i, C_i s'obtiennent en écrivant que l'équation

$$X'_i \varphi = 0$$

est vérifiée en chaque point de la multiplicité considérée.

Calcul de A_1, B_1, C_1 . — En faisant $i = 1$, on trouve

$$X'_1(\varphi) = -A_1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + bx + B_1 x - cx^n - C_1 \frac{x^n}{n} = 0.$$

Cette relation étant indépendante de y doit avoir lieu quelles que soient les valeurs de x, a, b, c ; par suite,

$$A_1 = 0, \quad B_1 = b, \quad C_1 = cn.$$

Ainsi

$$X'_1 f = x \frac{\partial f}{\partial x} - b \frac{\partial f}{\partial b} - cn \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Calcul de A_2, B_2, C_2 .

$$X'_2(\varphi) = y - \left(1 - \frac{1}{n}\right) A_2 + B_2 x - C_2 \frac{x^n}{n};$$

donc on doit avoir identiquement

$$a \left(1 - \frac{1}{n}\right) - bx + c \frac{x^n}{n} - \left(1 - \frac{1}{n}\right) A_2 + x B_2 - \frac{x^n}{n} C_2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_2 = a, \quad B_2 = b, \quad C_2 = c$$

et, par suite,

$$X'_2 f = y \frac{\partial f}{\partial y} + a \frac{\partial f}{\partial a} + b \frac{\partial f}{\partial b} + c \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Calcul de A_3, B_3, C_3 .

$$X'_3 \varphi = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right) A_3 + x B_3 - C_3 \frac{x^n}{n} = 0.$$

Cette relation doit être une identité en x, a, b, c ; donc

$$B_3 = 0, \quad C_3 = 0, \quad A_3 = \frac{n}{n-1}$$

et

$$X'_3 f = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{n}{n-1} \frac{\partial f}{\partial a}.$$

Calcul de A_4, B_4, C_4 .

$$X'_4 \varphi = x - \left(1 - \frac{1}{n}\right) A_4 + x B_4 - C_4 \frac{x^n}{n} = 0,$$

d'où

$$A_4 = 0, \quad C_4 = 0, \quad B_4 = -1,$$

$$X'_4 f = x \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial b}.$$

Calcul de A_5, B_5, C_5 .

$$X'_5 \varphi = x^n - \left(1 - \frac{1}{n}\right) A_5 + x B_5 - \frac{x^n}{n} C_5 = 0,$$

d'où

$$A_5 = 0, \quad B_5 = 0, \quad C_5 = n,$$

$$X'_5 f = x^n \frac{\partial f}{\partial y} + n \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Il résulte du calcul précédent que l'équation

$$(II) \quad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \quad n \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$$

admet le groupe à cinq paramètres défini par les transformations infinitésimales

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y} + n z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Nous avons déjà vu (I^{re} Partie, p. 23) que l'équation (II) n'admet pas d'autres transformations infinitésimales que les précédentes; donc Γ est bien le groupe de l'équation (II).

De là nous pouvons conclure (I^{re} Partie, p. 39) un résultat déjà annoncé

et relatif à l'équation différentielle des courbes

$$y = a + bx + cx^n, \quad n \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2,$$

à savoir

$$((2)) \quad xy''' - (n-2)y'' = 0.$$

Cette équation n'admet pas un groupe de transformations de contact à plus de cinq paramètres.

Caractéristiques de l'équation canonique (II). — Si l'on se reporte à la formule qui donne les courbes intégrales de l'équation différentielle du troisième ordre qui correspond à l'équation (II), on voit que les caractéristiques de cette dernière sont représentées par les équations

$$\begin{aligned} \beta &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)x = \alpha y + \frac{\alpha''}{n}z, \\ \gamma &= \alpha^{n-1}z = y, \end{aligned}$$

ou bien, en changeant la signification des lettres α, β, γ ,

$$(C) \quad \begin{cases} y - \alpha^{n-1}z = \gamma, \\ x - \alpha^n z = \beta. \end{cases}$$

D'autre part, les transformations finies du groupe Γ sont données par les formules

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} x' = ax + c_1, \\ y' = aby + c_2, \\ z' = ab^n z + c_3. \end{cases}$$

De là, on déduit immédiatement que les droites C s'obtiennent en appliquant toutes les transformations de Γ à la caractéristique particulière

$$x = y = z.$$

Cas particulier où $n = -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2$.

Si $n = 0$ ou $n = 1$, l'équation (II) devient linéaire et, par suite, admet un groupe infini. Si n est égal à l'un des nombres $-1, \frac{1}{2}, 2$, l'équation (II) devient, par une transformation ponctuelle évidente, identique à

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

et, par suite, admet un groupe à dix paramètres.

2. Passons à la détermination des équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique

$$((3)) \quad y''' - y'' = 0.$$

Les courbes intégrales de cette équation peuvent être représentées par

$$y = ce^x - ax - a - b.$$

Différentions, en considérant x et y comme constants, nous obtenons

$$e^x dc - x da - da - db = 0.$$

La condition pour que cette équation en x ait une racine double est

$$\frac{dc}{da} = \frac{db}{e^x da}.$$

Les équations aux dérivées partielles cherchées sont donc toutes semblables à celle qui a pour associée l'équation

$$(III) \quad \frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Groupe de l'équation (III).

Considérons la famille des courbes intégrales

$$y = ce^x - ax - a - b,$$

qui admet le groupe G , défini par

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_2 f = y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_4 f = x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad X_5 f = e^x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Cherchons le groupe conjugué de G . Comme dans le cas précédent, nous devons chercher les transformations infinitésimales de la forme

$$X_i f = X_i f + A_i(a, b, c) \frac{\partial f}{\partial a} + B_i(a, b, c) \frac{\partial f}{\partial b} + C_i(a, b, c) \frac{\partial f}{\partial c},$$

qu'admet la multiplicité de points (x, y, a, b, c) , définie par

$$\varphi = y - ce^x + ax + a + b = 0.$$

Calcul de A₁, B₁, C₁.

$$X_1 \varphi = -ce^x + a - e^x C_1 + xA_1 + A_1 + B_1.$$

Cette expression devant être nulle, quelles que soient x, a, b, c ,

$$A_1 = 0, \quad B_1 = -a, \quad C_1 = -c,$$

$$X'_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} - a \frac{\partial f}{\partial b} - c \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Calcul de A₂, B₂, C₂.

$$X_2 \varphi = y - e^x C_2 + xA_2 + A_2 + B_2.$$

Cette expression devant être nulle en chaque point (x, y, a, b, c) de la multiplicité $\varphi = 0$, on doit avoir identiquement

$$e^x(C_2 - c) + (A_2 - a)x + A_2 - a + B_2 - b = 0,$$

c'est-à-dire

$$A_2 = a, \quad B_2 = b, \quad C_2 = c$$

et

$$X'_2 f = y \frac{\partial f}{\partial y} + a \frac{\partial f}{\partial a} + b \frac{\partial f}{\partial b} + c \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Calcul de A₃, B₃, C₃.

L'identité

$$X_3 \varphi = 1 - e^x C_3 + xA_3 + A_3 + B_3 = 0$$

donne

$$A_3 = 0, \quad B_3 = -1, \quad C_3 = 0,$$

$$X'_3 f = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial b}.$$

Calcul de A₄, B₄, C₄.

L'identité

$$X_4 \varphi = x - e^x C_4 + xA_4 + A_4 + B_4 = 0$$

donne

$$A_4 = -1, \quad B_4 = 1, \quad C_4 = 0,$$

$$X'_4 f = x \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}.$$

Calcul de A₅, B₅, C₅.

L'identité

$$X_5 \varphi = e^x - e^x C_5 + xA_5 + A_5 + B_5 = 0$$

donne

$$A_5 = 0, \quad B_5 = 0, \quad C_5 = 1, \\ X'_5 f = e^x \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Il résulte du calcul précédent que l'équation

$$(III) \quad \frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}$$

admet le groupe défini par les cinq transformations infinitésimales suivantes :

$$(I) \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Reste à examiner si l'équation (I) n'admet pas un groupe d'ordre plus élevé. Pour cela, désignons par

$$Xf = \xi(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z}$$

une transformation infinitésimale laissant invariable l'équation (III) ou l'équation équivalente

$$\mathcal{L} dz - \mathcal{L} dx = \frac{dy}{dx}.$$

Les équations qui déterminent ξ, η, ζ s'obtiennent en écrivant que l'équation

$$\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy + \frac{\partial \zeta}{\partial z} dz}{dz} - \frac{\frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz}{dx} \\ - \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy + \frac{\partial \eta}{\partial z} dz}{dx} - \frac{dy \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy + \frac{\partial \xi}{\partial z} dz}{dx}$$

est une conséquence de (III). Posons

$$\frac{dy}{dx} = \alpha.$$

Les équations cherchées s'obtiendront en écrivant que la relation

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial y} + e^\alpha \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) e^{-\alpha} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \xi}{\partial y} + e^\alpha \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) (1 - \alpha) + \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial y} + e^\alpha \frac{\partial \eta}{\partial z}$$

T. 8

est une identité en x, y, z, α , ce qui donne

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

En différentiant ces équations, on voit immédiatement que toutes les dérivées du deuxième ordre sont nulles; d'ailleurs, le nombre des fonctions ξ, η, ζ et de leurs dérivées du premier ordre est douze, le nombre des relations entre les dérivées du premier ordre est sept; donc le nombre des paramètres qui entrent dans ξ, η, ζ est égal à cinq. On trouve facilement

$$\xi = ax + c_1, \quad \eta = ay + bx + c_2, \quad \zeta = (a + b)z + c_3.$$

Ce résultat montre que les transformations qu'admet l'équation (I) sont toutes des transformations du groupe Γ . On peut donc dire que :

Γ est le groupe de l'équation (III).

De là nous pouvons conclure également que l'équation différentielle des courbes

$$y = a + bx + ce^x,$$

à savoir

$$((3)) \quad y''' = y'',$$

n'admet pas un groupe de transformations de contact à plus de cinq paramètres.

Caractéristiques de l'équation canonique (III). — Si l'on se reporte à la formule qui donne les courbes intégrales de l'équation

$$y''' = y'',$$

on voit que les caractéristiques de l'équation (III) sont les droites représentées par les équations

$$\begin{aligned} \beta &= e^\alpha z - \alpha x - x - y, \\ \gamma &= ze^\alpha - x, \end{aligned}$$

ou bien, en changeant la signification des lettres α, β, γ ,

$$(C) \quad \begin{cases} y + \alpha x = \beta, \\ e^\alpha z - x = \gamma. \end{cases}$$

D'autre part, les transformations finies du groupe Γ sont données par les

équations

$$(I) \quad \begin{cases} x' = ax + c_1, \\ y' = abx + ay + c_2, \\ z' = ae^b z + c_3. \end{cases}$$

De là on déduit immédiatement que les droites C peuvent être obtenues en appliquant toutes les transformations de Γ à la caractéristique particulière

$$y = 0, \quad z = x.$$

Résumé.

Il existe deux classes d'équations aux dérivées partielles admettant un groupe de transformations à cinq paramètres, sans admettre un groupe d'ordre plus élevé.

Les équations de la première classe sont semblables à l'équation associée à la suivante

$$(II) \quad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^n, \quad n \neq -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2.$$

Les transformations infinitésimales du groupe de cette équation sont déterminées par les cinq

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y} + nz \frac{\partial f}{\partial z};$$

les transformations finies sont données par

$$x' = a_1 x + a_3, \quad y' = a_1 a_2 y + a_4, \quad z' = a_1 a_2^n z + a_5.$$

Les équations aux dérivées partielles de la deuxième classe sont semblables à l'équation qui a pour associée la suivante :

$$(III) \quad \frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Les transformations infinitésimales du groupe de l'équation (III) sont les combinaisons linéaires des cinq suivantes :

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z};$$

les transformations finies sont

$$x' = a_1 x + a_3, \quad y' = a_1 a_2 x + a_1 y + a_4, \quad z = a_1 e^{a_2} z + a_5.$$

Toute équation aux dérivées partielles admettant un groupe ponctuel à cinq paramètres (sans admettre un groupe d'ordre plus élevé) dérive, par une transformation ponctuelle, de l'une des deux précédentes.

CHAPITRE III.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI CORRESPONDENT À L'ÉQUATION $y' y''' = m y''^2$.

1. Considérons d'abord le cas où m est différent des nombres 1 et 2.

Les courbes intégrales de l'équation sont alors représentées par

$$(1) \quad (y + b)^{m-1} = c(x + a)^{m-2}.$$

L'équation aux différentielles totales correspondante s'obtient en exprimant que la courbe représentée par l'équation (1) est tangente à la courbe infiniment voisine

$$(2) \quad \frac{(m-1)db}{y+b} = \frac{dc}{c} + \frac{(m-2)da}{x+a};$$

il suffit pour cela d'éliminer x et y entre les équations (1), (2) et la suivante (*voir* p. 16)

$$\frac{db}{y+b} = \frac{da}{x+a};$$

on obtient ainsi

$$(4) \quad \frac{dc}{da} = \left(\frac{db}{da} \right)^{m-1}.$$

L'équation proposée ne fournit donc pas d'équation canonique nouvelle, car on a vu que l'équation (4) admet au moins un groupe à cinq paramètres.

Remarque. — Si m est différent de 0, 1, $\frac{3}{2}$, 2, 3, l'équation (4) n'admet qu'un groupe à cinq paramètres (*voir* p. 59); donc :

Le groupe des transformations de contact qui laissent invariante l'équa-

tion

$$(5) \quad y' y''' = m y''^2$$

est un groupe à cinq paramètres pour toute valeur de m différente de

$$0, 1, \frac{3}{2}, 2, 3.$$

Si m est égal à 0, $\frac{3}{2}$, 3, l'équation (4) admet un groupe à dix paramètres : il en est donc de même de l'équation (5).

Enfin, si $m = 1$ ou $m = 2$, on ne peut plus comparer les groupes des équations (4) et (5), car ces équations ne se correspondent pas. Nous allons trouver que, dans ce cas, l'équation (5) admet un groupe à cinq paramètres.

2. Considérons d'abord le cas où $m = 1$.

L'équation différentielle considérée devient

$$(1) \quad y' y''' = y''^2$$

et a pour intégrale générale

$$(2) \quad \beta(y + b) = e^{\alpha(x+a)};$$

α et b désignent deux paramètres arbitraires, α et β sont deux paramètres liés par la relation

$$(3) \quad \varphi(\alpha, \beta) = 0$$

pour le moment indéterminé.

Comme précédemment, nous devons exprimer que la courbe représentée par l'équation (2) est tangente à la courbe infiniment voisine

$$(4) \quad \frac{d\beta}{\beta} + \frac{db}{y+b} = (x+a) dx + \alpha da;$$

il suffit, pour cela, d'éliminer x et y entre les équations (2), (3) et la suivante

$$(5) \quad \frac{d\beta}{\beta} - \frac{d\alpha}{\alpha} = (x+a) d\alpha + \alpha da;$$

Choisissons maintenant la fonction indéterminée φ , de manière que

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\rho};$$

nous avons alors à éliminer x et y entre les équations suivantes

$$y + b = ce^{\frac{x+a}{c}}, \quad \frac{da}{x+a} = \frac{db}{y+b} = \frac{dc}{c},$$

ce qui donne

$$\frac{db}{dc} = e^{\frac{da}{dc}}.$$

Cette équation est aussi une de celles que nous avons déjà trouvées : elle admet un groupe à cinq paramètres.

3. Soit $m = 2$.

L'équation différentielle devient

$$(1) \quad y' y''' = 2 y''^2$$

et a pour intégrale générale

$$(2) \quad \beta(y+b) = \varrho(x+a)\alpha, \quad \varphi(\alpha, \beta) = 0.$$

Exprimons que la courbe représentée par l'équation (1) est tangente à la courbe infiniment voisine

$$(3) \quad (y+b) d\beta + \beta db = \frac{da}{x+a} + \frac{d\alpha}{\alpha};$$

nous sommes alors conduits à éliminer x et y entre les équations (2), (3) et la suivante

$$(4) \quad (y+b) d\beta + \beta db = \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{d\beta}{\beta}.$$

Prenons encore

$$\alpha = \beta = \frac{1}{c}.$$

Le système des équations (2), (3), (4) est alors équivalent au suivant

$$\begin{cases} \frac{da}{x+a} = \frac{db}{y+b} = \frac{dc}{c}, \\ \frac{y+b}{c} = \varrho \frac{x+a}{c}, \end{cases}$$

et le résultat de l'élimination de x et y est évidemment

$$\frac{da}{dc} = e^{\frac{db}{dc}}.$$

Nous retombons encore une fois sur une équation déjà obtenue.

Le calcul précédent montre que l'équation du troisième ordre

$$(1) \quad y' y''' = m y''^2$$

admet, dans tous les cas, plus de quatre transformations infinitésimales.

Nous allons maintenant déterminer les transformations de contact qui permettent de ramener la forme (1) à l'une des formes canoniques.

Réduction de l'équation (1) à sa forme canonique.

Premier cas. — Soit $m = 1$.

Les éléments linéaires des courbes intégrales sont, comme on a vu, déterminés par les deux équations

$$y + b = c e^{\frac{y+a}{c}}, \quad y' = e^{\frac{y+a}{c}}$$

ou bien

$$(2) \quad \begin{cases} c y' - b = y, \\ c \mathcal{L} y' - a = x. \end{cases}$$

D'après une remarque fondamentale faite au début de ce travail, ces équations représentent, quand on y considère x, y, y' comme constants et a, b, c comme variables, les caractéristiques de l'équation associée à

$$(3) \quad \frac{db}{dc} = e^{\frac{da}{dc}}.$$

Effectuons sur a, b, c une permutation circulaire; cette transformation particulière ramène l'équation (3) à la forme canonique

$$(4) \quad \frac{dc}{da} = e^{\frac{db}{da}},$$

et le système (2) devient

$$(2') \quad \begin{cases} a y' - c = y, \\ a \mathcal{L} y' - b = x. \end{cases}$$

D'autre part, on a vu que les mêmes caractéristiques peuvent être représentées par les deux équations

$$\begin{aligned} y_1 &= c e^{x_1} - a x_1 - a - b, \\ y'_1 &= c e^{x_1} - a \end{aligned}$$

ou

$$(5) \quad \begin{cases} ax_1 + b = y'_1 - y_1, \\ ce^{x_1} - a = y'_1, \end{cases}$$

qui définissent les éléments linéaires (x_1, y_1, y'_1) des courbes intégrales de l'équation canonique

$$((3)) \quad y''_1 - y'_1 = 0.$$

Pour déterminer une transformation particulière qui ramène la forme (1) à la forme canonique ((3)), il suffit de trouver les fonctions

$$x_1 = f(x, y, y'), \quad y_1 = g(x, y, y'), \quad y'_1 = h(x, y, y'),$$

de manière que les systèmes (2') et (5) définissent la même multiplicité de points (x, y, y', a, b, c) . On trouve immédiatement, en remarquant que les équations (2') et (5) sont linéaires en a, b, c ,

$$(6) \quad x_1 = -\mathcal{L}y', \quad y'_1 - y_1 = -x, \quad y'_1 = -\frac{y}{y'}.$$

Il est aisé de vérifier d'ailleurs que les équations (6) définissent une transformation de contact.

Deuxième cas. — $m = 2$.

On trouve de même que, pour ramener l'équation

$$y'y''' = 2y''^2$$

à la forme canonique ((3)), il suffit d'effectuer la transformation de contact définie par les équations

$$x_1 = \mathcal{L}y', \quad y_1 - y'_1 = y, \quad y'_1 = -xy'.$$

Troisième cas. — La même méthode montre encore que, si m est différent des nombres 1 et 2, il suffit d'effectuer, dans l'équation

$$y'y''' = my''^2$$

la transformation de contact

$$x_1 = \frac{\mu}{y'}, \quad y_1 = \mu \frac{y - xy'}{y'}, \quad y'_1 = y, \quad \mu = \frac{m-2}{m-1}$$

pour ramener cette équation à la forme canonique

$$x_1 y_1''' - (m - 3) y_1'' = 0.$$

CHAPITRE IV.

CLASSIFICATION DES GROUPE HOMOGRAPHIQUES A UN PARAMÈTRE DU PLAN. COURBES PLANES ADMETTANT UN GROUPE HOMOGRAPHIQUE. SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS CANONIQUES.

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0, \quad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \quad \frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Les courbes planes qui admettent un groupe homographique jouent un rôle important dans l'interprétation géométrique des résultats précédents. Ces courbes ont été déterminées par MM. Sophus Lie et Klein et appelées par eux *courbes V* (*Math. Annalen*, t. IV). La recherche de ces courbes est fondée sur la classification suivante des groupes homographiques à un paramètre du plan.

1. *Classification des groupes homographiques à un paramètre et à une variable x.* — Un quelconque de ces groupes est engendré par une transformation infinitésimale de la forme

$$Xf = (a + 2bx + cx^2) \frac{df}{dx}.$$

Ce groupe laisse invariants deux points *distincts* ou deux points *confondus* suivant que

$$b^2 - ac \neq 0 \quad \text{ou} \quad b^2 - ac = 0.$$

Par un changement de variables homographiques, on peut ramener Xf , dans le premier cas, à la forme

$$(1) \quad X_1 f = x \frac{df}{dx} \quad (\text{points invariants } x = 0, x = \infty)$$

et, dans le second cas, à la forme

$$(2) \quad X_2 f = \frac{df}{dx} \quad (\text{points invariants } x^2 = \infty).$$

Si l'on se borne à considérer les changements de variables homographiques, on peut dire que les formes (1) et (2) ne sont pas *semblables*, car la substitution qui change $X_2 f$ en $X_1 f$ est définie par l'équation transcendante

$$x' = C e^x.$$

En résumé, les groupes homographiques considérés se partagent en deux classes : ceux de la première sont semblables au groupe G_1 défini par $X_1 f$, ceux de la seconde au groupe G_2 défini par $X_2 f$.

Les transformations finies de G_1 et G_2 sont

$$(G_1) \quad x' = a x,$$

$$(G_2) \quad x' = x + a.$$

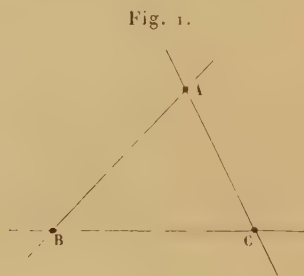
2. *Classification des groupes homographiques à un paramètre et deux variables x et y .* — Un quelconque G de ces groupes est engendré par une transformation infinitésimale de la forme

$$Xf = (a_0 + a_1 x + a_2 y) \frac{\partial f}{\partial x} + (b_0 + b_1 x + b_2 y) \frac{\partial f}{\partial y} + (c_1 x + c_2 y) \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Ce groupe G laisse invariants des points et des droites du plan; l'étude de ces éléments invariants va nous fournir une méthode de classification toute naturelle ⁽¹⁾.

Les seuls cas qui peuvent se présenter sont les suivants :

I. Le groupe G laisse invariants A, B, C et trois droites formant les côtés du triangle ABC (*fig. 1*).



Le groupe G est alors *semblable homographiquement* au groupe G_1

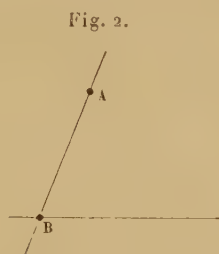
⁽¹⁾ *Transformationsgruppen* (p. 580-585).

qui laisse invariant le triangle formé par la droite de l'infini, l'axe des x et l'axe des y .

Transformation infinitésimale de G_1 . $x \frac{\partial f}{\partial x} + m y \frac{\partial f}{\partial y}$, $m \neq 0, 1$.

Transformations finies de G_1 $x' = ax$, $y' = a^m y$.

II. Le groupe G laisse invariants un point simple A et un point double B



(fig. 2). Les droites invariantes sont : une droite double confondue avec AB et une droite simple passant par B .

Le groupe G est alors semblable homographiquement au groupe G_2 qui laisse invariants :

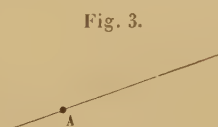
Le point simple ($z = 0, x = 0$), La droite simple $y = 0$;

Le point double ($z = 0, y = 0$), La droite double $z = 0$.

Transformation infinitésimale de G_2 $\frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}$.

Transformations finies de G_2 $x' = x + a$, $y' = e^a y$.

III. Le groupe G laisse invariants un point triple A et une droite triple passant par A (fig. 3).



G est alors semblable homographiquement au groupe G_3 qui laisse invariants le point triple ($x = 0, z = 0$) et la droite triple $z = 0$.

Transformation infinitésimale de G_3 . $\frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}$.

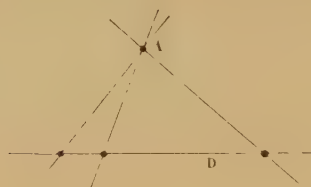
Transformations finies de G_3 $x' = x + a$, $y' = y + ax$.

IV. Le groupe G laisse invariants une infinité de points et de droites, à

savoir : chaque point d'une certaine droite D et chaque droite d'un faisceau A (de sorte que le point A est invariant). Ce cas se subdivise en deux autres :

1° Le point A est extérieur à la droite D (*fig. 4*); le groupe G est alors

Fig. 4.



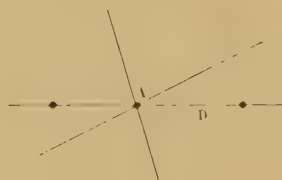
semblable homographiquement au groupe G_4 qui laisse invariants chaque point de l'axe des y et chaque droite parallèle à l'axe des x .

Transformation infinitésimale de G_4 $x \frac{\partial f}{\partial x}$.

Transformations finies de G_4 $x' = ax, \quad y' = y$.

2° Le point A est situé sur la droite D (*fig. 5*).

Fig. 5.



Le groupe G est alors homographiquement semblable au groupe G_5 qui laisse invariant chaque point de la droite de l'infini et chaque droite parallèle à l'axe des x .

Transformation infinitésimale de G_5 ... $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Transformations finies de G_5 $x' = x + a, \quad y' = y$.

En résumé, les groupes homographiques G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 , d'où dérivent tous les autres, sont définis par les transformations infinitésimales sui-

vantes

$$(I) \quad X_1 f = x \frac{df}{dx} + my \frac{df}{dy},$$

$$(II) \quad X_2 f = \frac{df}{dx} + y \frac{df}{dy},$$

$$(III) \quad X_3 f = \frac{df}{dx} + x \frac{df}{dy},$$

$$(IV) \quad \begin{cases} X_4 f = x \frac{df}{dx}, \\ X_5 f = \frac{df}{dx}. \end{cases}$$

3. *Courbes planes admettant une transformation homographique infinitésimale.* — Je dirai dans la suite que la courbe C' , représentée par

$$(1) \quad \varphi'(x, y) = 0,$$

est une dérivée homographique de la courbe C , représentée par

$$(2) \quad \varphi(x, y) = 0,$$

si l'équation (1) est la transformée de l'équation (2) par une substitution homographique.

Cela posé, considérons une transformation homographique infinitésimale Xf et cherchons les courbes qui admettent cette transformation (et par suite le groupe G engendré par Xf).

Premier cas. — Xf est semblable homographiquement à

$$X_1 f = x \frac{df}{dx} + my \frac{df}{dy}, \quad m \neq 0, 1,$$

En d'autres termes, Xf est une transformation infinitésimale de la première classe.

Les courbes qui admettent la transformation infinitésimale $X_1 f$ sont les courbes intégrales de l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{my},$$

c'est-à-dire les courbes représentées par l'équation

$$y = Ax^m.$$

On peut donc dire que :

Toute courbe admettant une transformation infinitésimale de la première classe est une dérivée homographique d'une courbe

$$y = x^m.$$

Deuxième cas. — Xf est une transformation infinitésimale de la deuxième classe, c'est-à-dire est semblable homographiquement à

$$X_2f = \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Toute courbe admettant cette transformation infinitésimale X_2f est une courbe intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{1} - \frac{dy}{y};$$

c'est-à-dire une courbe ayant une équation de la forme

$$y = \Lambda e^x.$$

Donc :

Toute courbe admettant une transformation infinitésimale de la deuxième classe est une dérivée homographique de la courbe

$$y = e^x.$$

Troisième cas. — Xf est une transformation infinitésimale de la troisième classe, c'est-à-dire est semblable homographiquement à

$$X_3f = \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}.$$

On en conclut, par un raisonnement analogue aux précédents, que :

Toute courbe admettant une transformation infinitésimale de la troisième classe est une dérivée homographique de

$$2y - x^2 = 0,$$

c'est-à-dire une courbe quelconque du second degré (non décomposable).

Quatrième cas. — Xf est une transformation infinitésimale de la qua-

trième classe, c'est-à-dire est semblable homographiquement à

$$X_4 f = x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Comme précédemment, on trouve que :

Toute ligne admettant une transformation infinitésimale de la quatrième classe est une ligne droite.

4. On voit donc que les courbes admettant une transformation infinitésimale homographique sont les dérivées homographiques des courbes représentées par les équations

$$(1) \quad y = x^m,$$

$$(2) \quad y = e^x,$$

Cherchons maintenant à classer ces courbes d'après le nombre des transformations infinitésimales qu'elles admettent.

Cherchons d'abord les transformations homographiques infinitésimales de

$$(1) \quad y = x^m.$$

Je suppose m différent des nombres

$$-1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2.$$

Soit Xf

$$Xf = \xi(x, y) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\xi = a_0 + a_1 x + a_2 y + c_1 x^2 + c_2 xy,$$

$$\eta = b_0 + b_1 x + b_2 y + c_1 xy + c_2 y^2$$

une transformation infinitésimale satisfaisant à la question; les équations qui déterminent ξ et η s'obtiennent en écrivant que

$$(2) \quad \eta = m x^{m-1} \xi$$

est une conséquence de l'équation (1).

Si dans l'équation (2) on remplace y par x^m , ce qui donne

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^m + x^m (c_1 x + c_2 x^m) = m x^{m-1} [a_0 + a_1 x + a_2 x^m + x (c_1 x + c_2 x^m)].$$

on doit obtenir une identité; de là on conclut, eu égard aux hypothèses

faites sur m ,

$$\xi = x, \quad \eta = my.$$

Supposons, maintenant, que m soit égal à l'un des nombres

$$-1, \frac{1}{2}, 2,$$

la courbe (1) est alors une conique, c'est-à-dire une dérivée homographique

$$(3) \quad x^2 - 2y = 0.$$

Un calcul analogue au précédent montre que cette conique admet trois transformations homographiques infinitésimales, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right) - y \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Enfin, si m est égal à 0 ou à 1, la courbe (1) représente une ligne droite, c'est-à-dire une dérivée homographique de la droite

$$x = 0,$$

qui admet évidemment six transformations homographiques infinitésimales, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \left(x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad y \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

On trouve, aussi facilement, que la courbe

$$y = e^x$$

n'admet qu'une transformation infinitésimale homographique, à savoir

$$\frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Il résulte de là que toute courbe plane, admettant une transformation homographique infinitésimale, appartient à l'une des trois classes suivantes :

Première classe. — Cette classe comprend les courbes qui admettent une transformation infinitésimale homographique et une seule.

Ces courbes sont les dérivées homographiques de

$$y = x^m, \quad m \neq 0, 1 \quad \text{et} \quad m \neq -1, \frac{1}{2}, 2$$

et de

$$y = e^x.$$

Deuxième classe. — Les courbes de la deuxième classe admettent trois transformations infinitésimales et trois seulement. Ce sont les courbes du deuxième degré non décomposables.

Troisième classe. — Enfin la troisième classe comprend les courbes admettant six transformations homographiques infinitésimales. Ces courbes sont les droites du plan.

5. Cela posé, désignons par le symbole (J) tout complexe déterminé par les droites qui rencontrent une courbe V (plane). Cette courbe sera appelée la *directrice du complexe*.

Cherchons à former l'équation générale des complexes (J). A cet effet, considérons d'abord deux complexes (J) particuliers, à savoir les complexes J' et J'' qui ont respectivement pour directrices

$$\begin{aligned} z = 0, \quad y = x^m, \\ z = 0, \quad y = e^x. \end{aligned}$$

Il est clair que tout complexe J est la transformée homographique de l'un de ces deux complexes.

Le complexe J' a pour équation

$$(J') \quad \frac{y dz - z dy}{dz} = \left(\frac{x dz - z dx}{dz} \right)^m, \quad (1)$$

en entendant par là qu'il est formé par les tangentes aux courbes intégrales de l'équation (1).

De même, le complexe J'' a pour équation

$$(J'') \quad \frac{y dz - z dy}{dz} = e^{\frac{x dz - z dx}{dz}}.$$

Appliquons à ces deux complexes la transformation homographique

$$x' = -\frac{1}{z}, \quad y' = -\frac{x}{z}, \quad z' = -\frac{y}{z},$$

T.

qui transporte la directrice à l'infini, et nous trouvons pour complexes transformés les deux suivants

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^n, \quad \frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Pour obtenir l'équation d'un complexe (J) quelconque, il suffit de faire dans les équations précédentes la transformation homographique la plus générale. Remarquons d'ailleurs que ceux de ces complexes qui sont du deuxième degré peuvent être considérés comme des transformés homographiques du complexe des droites, rencontrant le cercle imaginaire de l'infini

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

Les développements qui précèdent nous conduisent aux résultats suivants :

Toute équation aux dérivées partielles, admettant un groupe de transformations à plus de quatre paramètres (c'est-à-dire un groupe à cinq ou dix paramètres), est une transformée ponctuelle d'une équation aux dérivées partielles, pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales déterminent un complexe J. Ce complexe J a pour directrice une courbe du deuxième degré (non décomposable) ou une courbe V quelconque, suivant que le groupe est à dix paramètres ou seulement à cinq.

CHAPITRE V.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE A QUATRE PARAMÈTRES. ÉQUATIONS QUI CORRESPONDENT A L'ÉQUATION CANONIQUE ((4)).

Je commence par déterminer les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation différentielle des courbes

$$(1) \quad y = a + bx + c\varphi(x),$$

à savoir l'équation

$$((4)) \quad \gamma''' \varphi''(x) - \gamma'' \varphi'''(x) = 0.$$

Le groupe de cette équation est, comme on sait, défini par les transformations infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \varphi(x) \frac{\partial f}{\partial y}$$

ou par les transformations finies

$$x' = x, \quad y' = \alpha + \beta x + \gamma \varphi(x) + \lambda y.$$

Le groupe conjugué G est donc évidemment le groupe à quatre paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$a' = \alpha + \lambda a, \quad b' = \beta + \lambda b, \quad c' = \gamma + \lambda c.$$

Cela posé, si l'on élimine x entre les deux équations

$$\begin{aligned} da + x db + \varphi(x) dc &= 0, \\ db + \varphi'(x) dc &= 0, \end{aligned}$$

on trouve une équation de la forme

$$(2) \quad \frac{dc}{da} = \Phi\left(\frac{db}{da}\right).$$

Réciproquement, quelle que soit la fonction Φ , on peut toujours déterminer $\varphi(x)$ de manière que les équations ((4)) et (2) se correspondent. Il suffit, pour le démontrer, de faire voir qu'une certaine intégrale complète de (2)

$$V(x, y, a, b, c) = 0$$

représente précisément l'intégrale générale d'une équation de la forme ((4)). Soit, à cet effet,

$$(3) \quad \frac{\partial c}{\partial a} = \varphi\left(\frac{\partial c}{\partial b}\right)$$

l'équation aux dérivées partielles associée à l'équation (2). Appliquons la règle donnée par Lagrange pour trouver une intégrale complète, c'est-à-dire posons

$$\frac{\partial c}{\partial b} = x, \quad \frac{\partial c}{\partial a} = \varphi(x),$$

x désignant une constante arbitraire, et intégrons

$$dc - x db - \varphi(x) da = 0,$$

ce qui donne

$$c - bx - a\varphi(x) - y = V(x, y, a, b, c) = 0.$$

Or cette équation représente bien, si l'on y considère a, b, c comme constantes, l'intégrale générale de l'équation

$$y''' \varphi''(x) - y'' \varphi'''(x) = 0.$$

De ce qui précède résulte que :

Les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique ((4)) sont semblables à celle qui a pour associée

$$(IV) \quad \frac{dz}{dx} = \Phi\left(\frac{dy}{dx}\right),$$

Φ désignant une fonction arbitraire.

L'équation (IV) admet le groupe défini par les quatre transformations infinitésimales

$$(G) \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}$$

ou par les transformations finies

$$x' = a_1 x + a_2, \quad y' = a_3 y + a_4, \quad z' = a_5 z + a_6.$$

Reste à examiner si l'équation (IV) n'admet pas un groupe d'ordre plus élevé. Pour cela, cherchons les transformations infinitésimales

$$Xf = \xi(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta(x, y, z) \frac{\partial f}{\partial z},$$

qui laissent invariante l'équation (IV). Posons

$$\frac{dy}{dx} = \alpha, \quad \frac{dz}{dx} = \beta.$$

Alors

$$X(\alpha) = \frac{\partial \eta}{\partial x} + \alpha \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \beta \frac{\partial \eta}{\partial z} - \alpha^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - \alpha \beta \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$X(\beta) = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \beta \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \alpha \beta \frac{\partial \xi}{\partial y} - \beta^2 \frac{\partial \xi}{\partial z};$$

ξ, η, ζ sont données par les équations qui expriment que

$$(3) \quad X(\beta) - \Phi'(\alpha) X(\alpha) = 0$$

est une conséquence de

$$(4) \quad \beta = \Phi(\alpha).$$

Un calcul facile montre que la condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait

$$X(\alpha) = 0, \quad X(\beta) = 0,$$

quelles que soient α et β , est que Xf soit une transformation infinitésimale du groupe G . Cela posé, supposons que Xf désigne une transformation infinitésimale n'appartenant pas au groupe G , et représentons par A et B

$$A = a_0 + a_1\alpha + a_2\beta + \alpha(c_1\alpha + c_2\beta), \quad B = b_0 + b_1\alpha + b_2\beta + \beta(c_1\alpha + c_2\beta)$$

ce que deviennent $X(\alpha)$ et $X(\beta)$ quand on y remplace x, y, z par des constantes choisies de manière que les coefficients a, b, c ne soient pas tous nuls. Il faut évidemment que l'équation

$$B - A\Phi'(\alpha) = 0 \quad (5)$$

soit aussi une conséquence de l'équation (4).

En d'autres termes, si l'on considère α, β comme les coordonnées d'un point d'un plan, il faut que la courbe représentée par

$$\beta = \Phi(\alpha)$$

soit une courbe V . Dans ce cas l'équation (IV) est semblable à une des équations déjà trouvées, qui admettent un groupe à cinq paramètres.

Si la fonction Φ est quelconque, comme nous le supposons, l'équation (IV) admet le groupe G et n'admet pas un groupe d'ordre plus élevé. On peut donc dire que G est le groupe de l'équation (IV).

Ceci nous conduit à cet autre résultat.

L'équation différentielle des courbes

$$y = a + bx + c\varphi(x),$$

à savoir

$$(4) \quad y''' \varphi'' - y'' \varphi''' = 0$$

admet un groupe de transformations de contact à quatre paramètres, et n'admet pas de groupe d'ordre plus élevé.

Les équations aux dérivées partielles, qui correspondent à l'équation ((4)),

sont susceptibles d'une interprétation géométrique analogue à celle que nous avons déjà donnée pour les équations qui admettent un groupe de transformations à plus de quatre paramètres.

Désignons par le symbole (I) tout complexe déterminé par les droites qui rencontrent une courbe plane quelconque C. Il est clair que tout complexe (I) est une transformée homographique d'un complexe de même nature pour lequel la directrice est dans le plan de l'infini, c'est-à-dire d'un complexe ayant une équation de la forme

$$\frac{dz}{dx} = \Phi\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Donc :

Les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation ((4)) dérivent, par une transformation ponctuelle, d'une équation aux dérivées partielles pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales déterminent un complexe (I).

CHAPITRE VI.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE A QUATRE PARAMÈTRES (SUITE). ÉQUATIONS QUI CORRESPONDENT AUX ÉQUATIONS CANONIQUES

$$((5)) \quad y''' = k y''^p \quad \text{et} \quad ((6)) \quad y''' e y'' = 1.$$

1. Nous avons vu déjà (p. 36) que les équations ((5)), qui correspondent à la même valeur de p , dérivent toutes (sauf $y''' = 0$) de l'une d'entre elles

$$(1) \quad y''' = h y''^p, \quad h \neq 0,$$

par une transformation ponctuelle. Il suffit donc de chercher les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation particulière (1). Dans la suite nous poserons

$$p = \frac{m-3}{m-2}, \quad m-2 \neq 0,$$

et nous prendrons

$$h = m-2.$$

Pour écrire l'intégrale générale de l'équation ((5)) nous sommes obligés de distinguer plusieurs cas.

Premier cas. — m est différent de 0 et de 1 (et bien entendu aussi de 2).
Alors l'équation (1) est l'équation différentielle des courbes

$$(2) \quad y = \frac{(x+a)^m}{m(m-1)} - b(x+a) + c.$$

L'équation aux différentielles totales qui correspond à cette équation résulte de l'élimination de x entre

$$\begin{aligned} \frac{(x+a)^{m-1}}{m-1} \cdot da + (x+a) db + dc - b da &= 0, \\ (x+a)^{m-2} da - db &= 0, \end{aligned}$$

et par suite a la forme suivante

$$\frac{dc - b da}{da} = \frac{1}{n} \left(\frac{db}{da} \right)^n, \quad \text{où} \quad n = \frac{m-1}{m-2} = 2-p \quad (1).$$

Remplaçons a, b, c respectivement par

$$\frac{2a}{n}, \quad \frac{2b}{n}, \quad \frac{2(c+ab)}{n^2};$$

l'équation des courbes intégrales devient

$$y = \frac{1}{m(m-1)} \left(x + \frac{2a}{n} \right)^m - \frac{2bx}{n} + \frac{2(c-ab)}{n^2},$$

et l'équation aux différentielles totales

$$\frac{dc + a db - b da}{da} = \left(\frac{db}{da} \right)^n, \quad n = 2-p.$$

Deuxième cas. — $m = 0$.

L'équation (1) devient

$$-\frac{1}{2} y''' y''^{-\frac{3}{2}} = 1.$$

Les courbes intégrales peuvent être représentées par l'équation

$$y = c - b(x+a) - \mathcal{L}(x+a).$$

L'équation aux différentielles totales correspondantes à cette forme s'ob-

(1) On voit que n est différent de 1 et de 0.

tient en éliminant x entre

$$dc - (x + a) db - \frac{da}{x + a} = 0$$

et

$$db = \frac{da}{(x + a)^2},$$

ce qui donne

$$\frac{dc - b da}{da} = 2 \left(\frac{db}{da} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Remplaçons a, b, c respectivement par

$$8a, \quad 2b, \quad 8c - 8ab.$$

L'équation des courbes intégrales devient

$$y = 8(c - ab) - 2bx - \xi(x + 8a),$$

et l'équation aux différentielles totales

$$\frac{dc + a db - b da}{da} = \left(\frac{db}{da} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Troisième cas. — Soit $m = 1$.

L'équation (1) devient

$$y''' + y''^2 = 0,$$

les courbes intégrales peuvent alors être représentées par

$$y = (x + a)[\xi(x + a) - 1] - c(x + a) + b.$$

L'équation aux différentielles totales correspondant à cette forme s'obtient en éliminant x entre

$$\xi(x + a).da - (x + a)dc + db - c da = 0,$$

$$\frac{da}{x + a} = dc,$$

ce qui donne

$$3) \quad da \xi \frac{da}{dc} + db - da - c da = 0;$$

je dis que cette équation dérive de l'équation connue

$$\frac{dc}{da} = e^{\frac{db}{da}},$$

par une transformation ponctuelle. En effet, remplaçons dans (3) b par $a + b$. Nous obtenons

$$\varrho \frac{da}{dc} + \frac{db}{da} - c = 0$$

ou bien

$$e^c \frac{dc}{da} = e^{\frac{db}{da}},$$

il suffit maintenant de remplacer c par ϱc pour obtenir la forme désirée.

En résumé, les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation ((5)) sont, d'une part, les équations aux dérivées partielles correspondant à l'équation ((3)), d'autre part les équations semblables à celles qui a pour associée

$$(V) \quad \frac{dz + x \frac{dy}{dx} - y \frac{dx}{dz}}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^n, \quad \begin{matrix} n \neq 1, 0 \\ n = 2 - p \end{matrix}.$$

Un calcul absolument analogue à celui qui a été fait plus haut (p. 55) montre que cette équation admet le groupe

$$(G) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial z}, \\ n \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right), \end{array} \right.$$

ou bien

$$x' = b^{n-1}(x + a_1), \quad y' = b^n(y + a_2), \quad z' = b^{2n-1}(z + a_2x - a_1y + a_3).$$

Reste à examiner si G est bien le groupe de l'équation (V).

A priori on peut voir que, pour

$$n = 2,$$

l'équation (V) admet un groupe à dix paramètres, car alors elle correspond à l'équation

$$y''' = 1.$$

Il en est de même si

$$n = -1.$$

En effet, pour cette valeur de n l'équation (V) prend la forme

$$\frac{dz + x \frac{dy}{dy} - y \frac{dx}{dy}}{dy} = \left(\frac{dx}{dy} \right)^2.$$

T.

Changeons x en $-y$ et y en x , l'équation devient

$$\frac{dz + x \frac{dy}{dx} - y \frac{dx}{dx}}{\frac{dx}{dx}} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^2,$$

or celle-ci admet, comme nous venons de le voir, un groupe à dix paramètres ⁽¹⁾.

Nous allons démontrer que si l'on a

$$n \neq -1, 0, 1, 2,$$

l'équation (V) n'admet pas d'autres transformations infinitésimales que celles du groupe G. Il nous suffira de faire voir que l'équation

$$((5)) \quad y''' = ky''^p, \quad \text{où} \quad p = 2 - n \neq 0, 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad k \neq 0,$$

n'admet pas un groupe à plus de quatre paramètres.

2. Proposons-nous de déterminer le groupe de l'équation ((5)).

Soit

$$\xi(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'}$$

une transformation de contact infinitésimale laissant invariante l'équation ((5)) et soit W sa fonction caractéristique, de sorte que

$$\xi = -\frac{\partial W}{\partial y'}, \quad \eta = W - y' \frac{\partial W}{\partial y'}, \quad \zeta_1 = \frac{\partial W}{\partial x} + y' \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Désignons par Xf la transformation prolongée

$$\xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta_2(x, y, y', y'') \frac{\partial f}{\partial y''} + \zeta_3(x, y, y', y'', y''') \frac{\partial f}{\partial y'''}.$$

On sait que

$$\zeta_2 = P_0 + P_1 y'' + P_2 y''^2 = F_2(y''),$$

$$\zeta_3 = Q_0 + 3Q_1 y'' + 3Q_2 y''^2 + Q_3 y''^3 + (R_0 + R_1 y'') y''' = F_3(y'') + y''' F_4(y''),$$

⁽¹⁾ Plus généralement, si l'on remplace dans l'équation (V) n par $1 - n$, on obtient une équation semblable.

avec

$$\begin{aligned} P_0 &= \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y' \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right)^2, & P_1 &= \frac{\partial W}{\partial y'} + 2 \frac{\partial W}{\partial y'} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y' \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right), & P_2 &= \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}, \\ Q_0 &= \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y' \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right)^3, & Q_1 &= \frac{\partial W}{\partial y'} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y' \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right)^2 + \frac{\partial W}{\partial y} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y' \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right), \\ Q_2 &= \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y' \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right) + \frac{\partial^2 W}{\partial y' \partial y'}, & Q_3 &= \frac{\partial^3 W}{\partial y'^3}, \\ R_0 &= \frac{\partial W}{\partial y} + 3 \frac{\partial W}{\partial y'} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} + y' \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right), & R_1 &= 3 \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2}. \end{aligned}$$

Les équations aux dérivées partielles qui fournissent W s'obtiennent en écrivant que la multiplicité de points (x, y, y', y'', y''') définie par

$$X(y''') = k p y''^{p-1} X(y'')$$

est contenue dans la multiplicité $((5))$.

A cet effet, exprimons que la relation

$$(1) \quad F_3 + k y''^p F_1 = k p y''^{p-1} F_2,$$

est identique en x, y, y', y'' .

L'identité (1) prend la forme

$$(2) \quad F_3 = k y''^{p-1} (p F_2 - F_1 y'').$$

Si $p - 1$ n'est pas égal à la différence δ des degrés de F_3 et de $p F_2 - F_1 y''$, l'identité précédente se décompose en deux

$$(3) \quad F_3 = 0, \quad p F_2 - F_1 y'' = 0.$$

Voyons ce qui arrive si

$$(4) \quad p - 1 = \delta.$$

Les valeurs possibles pour δ sont les nombres suivants :

$$3, 2, 1, 0, -1, -2.$$

Il résulte des hypothèses faites sur p que l'égalité (4) ne peut avoir lieu que si

$$p = 4 \quad \text{ou} \quad p = -1.$$

Dans le premier cas, l'identité (2) montre que F_3 doit se réduire à son

dernier terme

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{Q}_3 \mathcal{Y}''^3 = \frac{\partial^3 \mathbf{W}}{\partial \mathcal{Y}''^3} \mathcal{Y}''^3,$$

et que $(4\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 \mathcal{Y}'')$ doit être indépendant de $\mathcal{Y}''$

$$4\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 \mathcal{Y}'' = \mathbf{P}_0.$$

Cette dernière égalité montre que

$$4\mathbf{P}_2 - \mathbf{R}_1 = \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \mathcal{Y}''^2} = 0.$$

De là, on déduit l'identité

$$\mathbf{F}_3 = 0;$$

et, par suite,

$$4\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 \mathcal{Y}'' = 0.$$

Dans le deuxième cas, l'identité (2) montre que

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{Q}_0, \quad \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1 \mathcal{Y}'' = (\mathbf{P}_2 + \mathbf{R}_1) \mathcal{Y}''^2;$$

de là on tire

$$\mathbf{P}_0 = 0;$$

puis

$$\mathbf{Q}_0 = 0;$$

donc, dans ce cas encore, les identités (3) sont vérifiées.

En résumé, l'identité (2) entraîne, dans tous les cas, les identités (3)

$$(3) \quad \mathbf{F}_3 = 0, \quad p\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 \mathcal{Y}'' = 0.$$

Celles-ci donnent

$$(4) \quad p\mathbf{P}_2 - \mathbf{R}_1 = 0, \quad p\mathbf{P}_1 - \mathbf{R}_0 = 0, \quad \mathbf{P}_0 = 0,$$

$$(5) \quad \mathbf{Q}_1 = 0, \quad \mathbf{Q}_2 = 0.$$

La première montre que

$$(a) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \mathcal{Y}''^2} = 0;$$

la seconde des égalités (5) donne alors

$$(b) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \mathcal{Y} \partial \mathcal{Y}'} = 0.$$

La seconde des égalités (4) devient

$$(p-1) \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathcal{Y}} + (2p-3) \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial x \partial \mathcal{Y}'} = 0,$$

ou bien

$$(c) \quad \frac{\partial W}{\partial y} + m \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y'} = 0,$$

où

$$m = \frac{2p-3}{p-1}.$$

Si l'on remarque que cette dernière entraîne

$$(d) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0,$$

on voit que les égalités $P_0 = 0$ et $Q_1 = 0$ prennent les formes suivantes

$$(e) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + 2y' \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$(f) \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0.$$

En différentiant l'équation (e) par rapport à y' , on trouve l'équation

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y'} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0.$$

On aperçoit alors immédiatement que

$$(g) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0,$$

et, par suite,

$$(h) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0.$$

En résumé, nous avons trouvé les équations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y'} = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial y} + m \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial y'} = 0; \end{aligned}$$

de là on déduit d'abord que toutes les dérivées du troisième ordre de W sont nulles, puis que

$$W = \alpha + \beta x + \gamma y' + \lambda(xy' - my).$$

Le groupe de l'équation ((5)) est donc défini par les quatre transforma-

tions infinitésimales

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + my \frac{\partial f}{\partial y},$$

qui ont pour fonctions caractéristiques

$$-y', \quad 1, \quad x, \quad my - xy'.$$

De là on conclut que le groupe de l'équation (V) est bien un groupe à quatre paramètres, lorsque n est différent de $-1, 0, 1, 2$. Ce que nous voulions démontrer.

En résumé, nous venons de trouver une nouvelle famille d'équations aux dérivées partielles admettant un groupe à quatre paramètres. Ce sont les équations semblables à celle qui a pour associée

$$(V) \quad \frac{dz + x dy - y dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^n \quad n \neq -1, 0, 1, 2.$$

3. Cherchons maintenant les équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation canonique

$$((6)) \quad y''' e y'' = 1.$$

Un calcul élémentaire montre que les courbes intégrales de cette équation sont représentées par

$$(1) \quad y = F(x + a) - b(x + a) + c,$$

avec

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \left(\zeta x - \frac{3}{2} \right).$$

L'équation aux différentielles totales correspondant à l'équation (1) s'obtient en éliminant x entre les équations

$$\begin{aligned} F'(x + a) da - (x + a) db + dc - b da &= 0, \\ F''(x + a) da - db &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on remarque que

$$\begin{aligned} F''(x) &= \zeta x, \\ F'(x) &= x \zeta x - x = x F''(x) - x, \end{aligned}$$

on trouve immédiatement que

$$\frac{dc - b da}{da} = e^{\frac{db}{da}}.$$

Remplaçons a, b, c respectivement par

$$2a, \quad 2b, \quad 2c + 2ab,$$

l'équation précédente devient

$$\frac{dc + a db - b da}{da} = e^{\frac{db}{da}}.$$

Les équations aux dérivées partielles cherchées sont donc toutes semblables à celle qui a pour associée

$$(VI) \quad \frac{dz + x dy - y dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Un calcul analogue à celui qui a été fait (p. 55) plus haut montre que cette équation admet le groupe défini par les transformations infinitésimales

$$(G) \quad \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial z}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial f}{\partial y} + 2z \frac{\partial f}{\partial z}$$

ou les transformations finies

$$x' = (x + a_1)e^{a_4}, \quad y' - a_4 x' = (y + a_2)e^{a_4}, \quad z' = (z + a_2 x - a_1 y + a_3)e^{2a_4}.$$

Nous allons démontrer maintenant que G est bien le groupe de l'équation (VI), c'est-à-dire que l'équation (VI) n'admet pas d'autres transformations infinitésimales que celles du groupe G. Tout revient à prouver que l'équation du troisième ordre

$$y''' e^{y''} = 1$$

n'admet pas de transformation infinitésimale étrangère au groupe déjà connu

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x} + \left(\frac{x^2}{2} + 2y \right) \frac{\partial f}{\partial y}.$$

A cet effet, soit Xf une transformation infinitésimale de contact laissant invariante cette équation et, par suite, l'équation équivalente

$$y''' = e^{-y''}.$$

La fonction W , caractéristique de Xf , est déterminée par l'identité en x, y, y', y''

$$F_3 + e^{-y''} F_1 = e^{-y''} F_2,$$

où F_1, F_2, F_3 ont les significations données plus haut (p. 83). De là on déduit d'abord

$$F_3 = 0, \quad F_1 + F_2 = 0$$

et ensuite

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial y'} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0, \quad 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial W}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y'} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0. \end{aligned}$$

Donc W est donnée par l'équation

$$W = a_1 + a_2 x + a_3 y' + a_4 \left(2y + \frac{x^2}{2} - xy' \right).$$

L'équation du troisième ordre considérée n'admet donc que quatre transformations infinitésimales distinctes, à savoir, les quatre déjà connues. Donc l'équation (VI) n'admet aussi que quatre transformations infinitésimales distinctes, ce que nous voulions démontrer.

CHAPITRE VII.

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE À QUATRE PARAMÈTRES (SUITE). ÉQUATIONS QUI CORRESPONDENT À L'ÉQUATION CANONIQUE ((7))

$$((7)) \quad yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{1}{2}}y''^3.$$

1. Je commencerai par intégrer l'équation ((7)), en me fondant sur la remarque suivante. Soit

$$f(x, y, a, b, c) = 0$$

la famille des courbes intégrales. Cette famille à *trois* paramètres admet le groupe G à *quatre* paramètres, défini par les transformations infinitési-

males

$$(G) \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y}$$

ou les transformations finies

$$(G) \quad x' = \frac{x+a}{bx+c}, \quad y' = \frac{my}{bx+c}.$$

Il résulte de là que chaque courbe de la famille admet certainement une transformation infinitésimale du groupe G. En d'autres termes, les courbes intégrales sont des *courbes* V (voir p. 65).

Ceci nous conduit à chercher si l'équation ((7)) admet une intégrale particulière ayant l'une des formes suivantes :

$$(1) \quad y = x^n,$$

$$(2) \quad y = e^x.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) représente une courbe intégrale est exprimée par l'équation

$$(3) \quad (2n-1)\sqrt{k^2-1} = k.$$

Si k^2 est différent de l'unité, cette équation permet de calculer n en fonction de k , et l'équation ((7)) admet, par suite, une intégrale particulière de la forme (1).

Si, au contraire,

$$k^2 = 1,$$

c'est l'équation (2) qui définit une intégrale particulière de l'équation ((7)).

En appliquant toutes les transformations du groupe G, dans le premier cas, à l'équation (1), dans le second cas, à l'équation (2), on trouve toutes les courbes intégrales cherchées.

Donc l'équation

$$(4) \quad y = \frac{bx+c}{m} \left(\frac{x+a}{bx+c} \right)^n$$

représente, dans le premier cas, les courbes intégrales, pourvu que n soit lié à k par la relation (3).

T.

Les courbes intégrales sont au contraire représentées par

$$(5) \quad y = \frac{bx + c}{m} e^{\frac{x+a}{bx+c}}.$$

Si l'on a

$$k^2 = 1.$$

A la vérité, les équations (4) et (5) contiennent quatre paramètres a, b, c, m , mais ces quatre paramètres ne sont pas *essentiels*.

En effet, si l'on pose

$$m = \mu^{1-n} \varphi(a', b', c'), \quad a = a', \quad b = \mu b', \quad c = \mu c',$$

l'équation (4) devient, après la suppression des accents,

$$(4') \quad y = \frac{bx + c}{\varphi(a, b, c)} \left(\frac{x + a}{bx + c} \right)^n;$$

de même, par le changement de paramètres

$$m \frac{e^\mu}{1 + b\mu} = \varphi(a', b', c'), \quad \frac{b}{1 + b\mu} = b', \quad \frac{c}{1 + b\mu} = c', \quad \frac{a + c\mu}{1 + b\mu} = a',$$

l'équation (5) prend la forme

$$y = \frac{bx + c}{\varphi(a, b, c)} e^{\frac{x+a}{bx+c}}.$$

La fonction arbitraire $\varphi(a, b, c)$ peut être remplacée par l'unité, mais nous verrons dans la suite qu'il y a avantage à poser

$$\varphi(a, b, c) = \sqrt{c - ab}.$$

2. *Recherche du premier groupe conjugué de G.* — Ce groupe Γ est formé par les transformations en a, b, c conjuguées des transformations

$$x' = \frac{x + \alpha}{\beta x + \gamma}, \quad y' = \frac{\lambda y}{\beta x + \gamma},$$

par rapport à l'équation

$$(4') \quad y = \frac{bx + c}{\varphi(a, b, c)} \left(\frac{x + a}{bx + c} \right)^n.$$

Plusieurs des transformations infinitésimales de Γ peuvent être obtenues *a priori* sans avoir recours à la méthode générale.

En effet, il est clair que l'équation (4') ne change pas de forme si l'on remplace x, a, c respectivement par

$$x + \alpha, \quad a - \alpha, \quad c - b\alpha$$

et si l'on choisit φ de manière que

$$\varphi(a - \alpha, b, c - b\alpha) = \varphi(abc), \quad \text{ou} \quad \varphi = F(c - ab).$$

Donc les transformations à un paramètre α

$$a' = a - \alpha, \quad c' = c - b\alpha$$

forment un sous-groupe de Γ et, par suite, l'une des transformations infinitésimales de Γ a pour symbole

$$A_1 f = \frac{\partial f}{\partial a} + b \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Quant à la fonction φ , nous la choisirons de manière que

$$\varphi = (c - ab)^m.$$

On aperçoit alors facilement que le groupe Γ contient les deux sous-groupes à un paramètre λ

$$\begin{cases} a' = a\lambda, & b' = b\lambda, \\ c' = c\lambda, & c' = c\lambda, \end{cases}$$

et, par suite, les deux transformations infinitésimales

$$A_2 f = a \frac{\partial f}{\partial a} + c \frac{\partial f}{\partial c}, \quad A_3 f = b \frac{\partial f}{\partial b} + c \frac{\partial f}{\partial c}.$$

Le groupe défini par les transformations infinitésimales $A_1 f, A_2 f$ et $A_3 f$ étant le groupe conjugué du groupe défini par $X_1 f, X_2 f$, et $X_3 f$, il ne reste plus qu'à déterminer la transformation infinitésimale conjuguée de $X_4 f$.

Il suffit, pour cela, de calculer les fonctions $\alpha(a, b, c)$, $\beta(a, b, c)$, $\gamma(a, b, c)$, de manière que la transformation infinitésimale

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + xy \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha \frac{\partial f}{\partial a} + \beta \frac{\partial f}{\partial b} + \gamma \frac{\partial f}{\partial c} = Xf$$

laisse invariante la multiplicité de points définie par l'équation (4') ou l'é-

quation équivalente

$$\mathfrak{L} \gamma = (1-n) \mathfrak{L}(bx+c) + n \mathfrak{L}(x+a) - \mathfrak{L} \varphi.$$

Les équations qui déterminent α , β , γ s'obtiennent en écrivant que la relation

$$x = \frac{1-n}{bx+c} (\beta x + \gamma + bx^2) + n \frac{x^2 + \alpha}{x+a} - \frac{\mathbf{X}(\varphi)}{\varphi}$$

est une identité en x , a , b , c . On trouve d'abord

$$\alpha = -a^2,$$

et, par suite

$$(1-n) \left[\frac{(\beta-c)x + \gamma}{bx+c} + a \right] = a + \frac{\mathbf{X}(\varphi)}{\varphi}.$$

Choisissons φ de manière que

$$\mathbf{X}(\varphi) = -a\varphi.$$

Alors β et γ sont données par les équations

$$\beta = c - ab, \quad \gamma = -ac,$$

et φ par

$$\varphi = \sqrt{c - ab}.$$

La transformation infinitésimale conjuguée de $X_4 f$ est donc

$$-a^2 \frac{\partial f}{\partial a} + (c - ab) \frac{\partial f}{\partial b} - ac \frac{\partial f}{\partial c};$$

le groupe à un paramètre qu'elle engendre est le suivant

$$a' = \frac{a}{1 + \lambda a}, \quad b' = \frac{b + \lambda c}{1 + \lambda a}, \quad c' = \frac{c}{1 + \lambda a}.$$

En résumé, le groupe Γ est engendré par les quatre transformations infinitésimales

$$\begin{aligned} \Lambda_1 f &= \frac{\partial f}{\partial a} + b \frac{\partial f}{\partial c}, & \Lambda_2 f &= a \frac{\partial f}{\partial a} + c \frac{\partial f}{\partial c}, \\ \Lambda_3 f &= a^2 \frac{\partial f}{\partial a} + (ab - c) \frac{\partial f}{\partial b} + ac \frac{\partial f}{\partial c}, & \Lambda_4 f &= b \frac{\partial f}{\partial b} + c \frac{\partial f}{\partial c}. \end{aligned}$$

Grâce à la manière dont nous avons déterminé φ , le groupe conjugué est homographique et indépendant du nombre n .

3. *Recherches du second groupe conjugué de G.* — Ce groupe Γ' est formé par les transformations en a, b, c , conjuguées des transformations

$$(G) \quad x' = \frac{x + \alpha}{\beta x + \gamma}, \quad y' = \frac{\lambda y}{\beta x + \gamma}$$

par rapport à l'équation

$$(5') \quad y = \frac{bx + c}{\varphi(a, b, c)} e^{\frac{x + a}{bx + c}}.$$

Choisissons encore φ de manière que

$$\varphi = \sqrt{c - ab}.$$

On peut déterminer toutes les transformations de Γ' sans avoir recours à la méthode générale. En effet, si l'on multiplie les deux membres de l'équation (5') par e^λ , on obtient

$$ye^\lambda = \frac{bx + c}{\sqrt{c - ab}} e^{\frac{x(1 + \lambda b) + a + \lambda c}{bx + c}};$$

donc l'équation (5'), considérée comme une équation à cinq variables x, y, a, b, c , admet la transformation

$$(1) \quad x' = x, \quad y' = ye^\lambda,$$

$$(2) \quad a' = \frac{1 + \lambda c}{1 + \lambda b}, \quad b' = \frac{b}{1 + \lambda b}, \quad c' = \frac{c}{1 + \lambda b}.$$

Donc les équations (2) définissent un sous-groupe à un paramètre du groupe Γ' . L'une des transformations infinitésimales de Γ' est donc

$$A_5 f = (ab - c) \frac{\partial f}{\partial a} + b^2 \frac{\partial f}{\partial b} + bc \frac{\partial f}{\partial c}.$$

On voit aussi facilement que les trois premières transformations infinitésimales de Γ , à savoir $A_1 f, A_2 f, A_3 f$, sont également des transformations infinitésimales de Γ' . Ce groupe Γ' est donc engendré par les quatre transformations infinitésimales distinctes

$$A_1 f, \quad A_2 f, \quad A_3 f, \quad A_5 f.$$

4. *Recherche des équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation*

$$((7)) \quad yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{4}{2}}y''^{\frac{3}{2}}.$$

Nous supposons dans la suite le nombre k différent de zéro (et par suite $n \neq \frac{1}{2}$), car, pour cette valeur de k , l'équation $((7))$ se réduit à

$$yy''' + 3y'y'' = 0,$$

c'est-à-dire

$$(y^2)''' = 0,$$

et dérive par une transformation ponctuelle

$$x_1 = x, \quad y_1 = y^2$$

de l'équation

$$y_1''' = 0,$$

Supposons d'abord le nombre k différent de l'unité. Les courbes intégrales de l'équation $((7))$ sont alors représentées par

$$y = \frac{bx+c}{\varphi(a,b,c)} \left(\frac{x+a}{bx+c} \right)^n, \quad \varphi = \sqrt{c-ab},$$

ou bien

$$\mathfrak{L}y = (1-n)\mathfrak{L}(bx+c) + n\mathfrak{L}(x+a) - \mathfrak{L}\varphi;$$

en appliquant la règle si souvent rappelée, nous sommes conduits à écrire que l'équation en x

$$\frac{(1-n)(x db + c)}{bx+c} + \frac{n da}{x+a} - \frac{d\varphi}{\varphi} = 0$$

a une racine double. A cet effet, posons

$$\frac{x+a}{bx+c} = t$$

et exprimons que le discriminant de l'équation en t

$$(1-n)(bdc - cdb)t^2 + (n - \frac{1}{2})(dc - adb + bda)t - nda = 0$$

est nul; nous obtenons ainsi

$$(1) \quad (2n-1)^2(dc - adb + bda)^2 - 16n(n-1)(bdc - cdb)da = 0.$$

Comme $2n - 1$ n'est pas nul, nous pouvons poser

$$\frac{4n(n-1)}{(2n-1)^2} = h.$$

Remarquons immédiatement que h n'est pas nul; il suffit pour le voir de se reporter à l'équation qui détermine n en fonction de k . En outre, il est clair que

$$h \neq 1.$$

L'équation (1) devient alors, après le *changement de a en $-a$* ,

$$(1) \quad (dc + adb + bda)^2 + 4h(bdc - cdb)da = 0.$$

Supposons maintenant

$$k^2 = 1.$$

Les courbes intégrales de l'équation ((7)) peuvent alors être représentées par l'équation

$$y = \frac{bx + c}{\sqrt{c + ab}} e^{\frac{x-a}{bx+c}}.$$

L'équation aux différentielles totales correspondante est

$$(dc + adb - bda)^2 + 4(da + bdc - cdb)(bdc - cdb) = 0.$$

En résumé, les équations aux dérivées partielles cherchées se partagent en deux classes. Celles de la première sont semblables à l'équation qui a pour associée

$$(VII') \quad (dz + xdy - ydx)^2 + 4h(ydz - zdy)dx = 0, \quad h \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}.$$

celles de la seconde sont semblables à l'équation qui a pour associée

$$(VIII') \quad (dz + xdy - ydx)^2 + 4(dx + ydz - zdy)(ydz - zdy) = 0.$$

L'équation (VII') admet, comme on a vu, le groupe défini par

$$\begin{aligned} X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial z}, & X_3 f &= x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + (xy + z) \frac{\partial f}{\partial y} + xz \frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_2 f &= x \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial z}, & X_4 f &= y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}. \end{aligned}$$

L'équation (VIII') admet le groupe défini par

$$X_1 f, X_2 f, X_3 f$$

et

$$X_5 f = (xy + z) \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + yz \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Remarque. — Si dans la forme canonique (VIII') on remplace x, y , respectivement par

$$\frac{z}{y}, \quad \frac{1}{y}, \quad \frac{x}{y},$$

on obtient la forme suivante, qui peut remplacer la forme (VIII') :

$$(VIII) \quad (dz + x dy - y dx)^2 + 4(dx + y dz - z dy) dx = 0.$$

Le groupe (X_1, X_2, X_3, X_5) se transforme d'ailleurs en

$$X_1 f, X_2 f, X_3 f, X_6 f,$$

où

$$X_6 f = \frac{\partial f}{\partial y} - x \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Observons en outre que les six transformations infinitésimales

$$X_1 f, X_2 f, \dots, X_6 f,$$

déterminent un groupe H, à savoir le groupe des transformations homographiques qui laissent invariante la surface du second degré

$$xy + z = 0.$$

Les transformations $X_1 f, X_2 f, X_3 f$ déterminent un sous-groupe de H et il en est de même de $X_4 f, X_5 f, X_6 f$ [on sait que ces deux sous-groupes sont réciproques (1)].

5. Nous venons de trouver que les équations canoniques (VII'), (VIII), (VIII') admettent chacune un groupe à quatre paramètres; nous allons maintenant démontrer qu'elles n'admettent pas un groupe d'ordre plus élevé. A cet effet, nous prouverons, ce qui est évidemment suffisant, que

(1) Voir *Transformationsgruppen*, t. I, p. 382.

l'équation

$$((7)) \quad yy''' + 3y'y'' = ky^{\frac{4}{2}}y''^{\frac{3}{2}}, \quad \text{où} \quad k \neq 0,$$

n'admet pas un groupe de transformations de contact à plus de quatre paramètres.

Soit

$$\xi(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1(x, y, y') \frac{\partial f}{\partial y'}$$

une transformation infinitésimale laissant invariante l'équation ((7)) et soit W sa fonction caractéristique, de sorte que

$$\xi = -\frac{\partial W}{\partial y'}, \quad \eta = W - y' \frac{\partial W}{\partial y'}, \quad \zeta_1 = \frac{\partial W}{\partial x} + y' \frac{\partial W}{\partial y}.$$

Désignons par Xf la transformation prolongée

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial y'} + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial y''} + \zeta_3 \frac{\partial f}{\partial y'''} \quad (1).$$

Cela posé, l'équation ((7)) peut prendre la forme

$$(1) \quad y''' = 3y''\varphi + y''^{\frac{3}{2}}\psi, \quad \varphi = -\frac{y'}{y}, \quad \psi = ky^{-\frac{1}{2}}.$$

Les équations qui déterminent W s'obtiennent en écrivant que la multiplicité de points (x, y, y', y'', y''') définie par

$$(2) \quad X(y''') = 3\varphi X(y'') + 3y''X(\varphi) + \frac{3}{2}\psi y''^{\frac{4}{2}}X(y'') + y''^{\frac{3}{2}}X(\psi)$$

est contenue dans la multiplicité (1). Pour cela exprimons que

$$F_3 + (3y''\varphi + y''^{\frac{3}{2}}\psi)F_1 = 3X(y''\varphi) + y''^{\frac{3}{2}}X(\psi) + \frac{3}{2}y''^{\frac{4}{2}}\psi X(y'')$$

est identique en x, y, y', y'' . Nous obtenons d'abord

$$(3) \quad y''\psi F_1 = y''X(\psi) + \frac{3}{2}\psi X(y''),$$

$$(4) \quad F_3 + 3y''\varphi F_1 = 3\varphi X(y'') + 3y''X(\varphi).$$

L'équation (3) montre que $X(y'')$ s'annule pour $y'' = 0$; donc

$$(a) \quad P_0 = 0$$

(1) Voir p. 82 et 83.

et par suite

$$(b) \quad Q_0 = 0.$$

L'équation (3) développée donne

$$(3') \quad (R_0 + R_1 y'') \psi = X(\psi) + \frac{3}{2} \psi (P_1 + P_2 y''),$$

et par suite, comme k est différent de zéro,

$$2R_1 = 3P_2,$$

c'est-à-dire

$$(c) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0.$$

Il résulte de là que

$$R_1 = P_2 = 0$$

et aussi

$$(d) \quad Q_3 = 0.$$

L'équation (3') devient alors

$$(3'') \quad R_0 \psi = X(\psi) + \frac{3}{2} \psi P_1$$

et l'équation (4) prend la forme

$$(4') \quad Q_1 + Q_2 y'' + R_0 \varphi = P_1 \varphi + X(\varphi).$$

Cette identité exige que

$$(e) \quad Q_2 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial y'} = 0.$$

Revenons à l'équation (3''); elle peut s'écrire

$$(2R_0 - 3P_1) \psi = 2X(\psi),$$

c'est-à-dire, eu égard aux valeurs de R_0 et P_1 ,

$$\psi \frac{\partial W}{\partial y} + 2X(\psi) = 0$$

ou bien

$$X(y) = y \frac{\partial W}{\partial y},$$

ou enfin

$$(f) \quad W = y \frac{\partial W}{\partial y} + y' \frac{\partial W}{\partial y'}.$$

Si l'on différentie cette égalité par rapport à y , et si l'on tient compte de (e), on trouve

$$(g) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

En résumé, la fonction W doit satisfaire aux relations suivantes :

$$P_0 = 2y' \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 0, \quad W = y \frac{\partial W}{\partial y} + y' \frac{\partial W}{\partial y'},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y'^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial y'} = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0.$$

De ces relations on déduit immédiatement que les dérivées du troisième ordre de W sont toutes nulles, sauf $\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y'}$ qui satisfait à

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y'} + 2 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y} = 0;$$

donc W est de la forme

$$W = a_1 y + a_2 y' + a_3 x y' + a_4 (x y + x^2 y').$$

On voit donc que l'équation ((7)) ne peut admettre que les quatre transformations infinitésimales qui ont pour fonctions caractéristiques

$$y, y', x y', x y - x^2 y',$$

c'est-à-dire les quatre suivantes

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}, \quad y \frac{\partial f}{\partial y}, \quad x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + x y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

C'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Nous pouvons donc dire que les groupes des équations canoniques (VII'), (VIII'), (VIII) sont respectivement

$$(X_1, X_2, X_3, X_4), \quad (X_1, X_2, X_3, X_5), \quad (X_1, X_2, X_3, X_6).$$

6. Modification de l'équation canonique (VII')

$$(dz + x dy - y dx)^2 + 4h dx (y dz - z dy) = 0, \quad h \neq 0, 1.$$

Effectuons la transformation homographique

$$x = \frac{x' + iy'}{i - z'}, \quad y = \frac{x' - iy'}{i - z'}, \quad z = -\frac{1 + z'}{i - z'},$$

qui fait correspondre à la surface

$$xy + z = 0$$

la sphère

$$(\Sigma) \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1 = 0.$$

Nous obtenons successivement les formules suivantes :

$$dz + x dy - y dx = -2i \frac{dz' + x' dy' - y' dx'}{(z' - i)^2},$$

$$dx = \frac{(i - z')(dx' + i dy') + (x' + iy') dz'}{(i - z')^2},$$

$$y dz - z dy = -\frac{(-i - z')(dx' - i dy') + (x' - iy') dz'}{(i - z')^2},$$

$$dx(y dz - z dy) = -\frac{(dx' + y' dz' - z' dy')^2 + (dy' + z' dx' - x' dz')^2}{(i - z')^2}.$$

L'équation proposée a donc pour transformée

$$\begin{aligned} & (dz' + x' dy' - y' dx')^2 + h(dx' + y' dz' - z' dy')^2 \\ & + h(dy' + z' dx' - x' dz')^2 = 0, \quad h \neq \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Nous pouvons, par suite, prendre pour équation canonique, à la place de l'équation (VII'), l'équation suivante

$$(VII) \quad a(dz + x dy - y dx)^2 + (dx + y dz - z dy)^2 + (dy + z dx - x dz)^2 = 0,$$

avec

$$a \neq 1.$$

Nous verrons plus tard que, si $a = 1$, cette équation peut être ramenée par une transformation ponctuelle à la forme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

Quant au groupe de l'équation (VII), c'est le groupe transformé du

groupe de (VII'). Les six transformations infinitésimales

$$\begin{aligned} X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial z} + x \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right), \\ X_2 f &= \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial x} + y \left(\dots \dots \dots \right), \\ X_3 f &= \frac{\partial f}{\partial z} + y \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial y} + z \left(\dots \dots \dots \right), \\ X_4 f &= \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial z} - z \frac{\partial f}{\partial y} + x \left(\dots \dots \dots \right), \\ X_5 f &= \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial x} - x \frac{\partial f}{\partial z} + y \left(\dots \dots \dots \right), \\ X_6 f &= \frac{\partial f}{\partial z} + x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} + z \left(\dots \dots \dots \right) \end{aligned}$$

définissent le groupe homographique de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Le groupe de l'équation (VII) est défini par les quatre transformations infinitésimales

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad X_3 f, \quad X_6 f.$$

CHAPITRE VIII.

SUR DEUX CLASSES PARTICULIÈRES DE COMPLEXES. — INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI ADMETTENT UN GROUPE A QUATRE PARAMÈTRES.

1. *Groupe spécial de transformations homologiques.* — Je commencerai par rappeler la définition d'un groupe de transformations homologiques que l'on rencontre fréquemment dans les recherches de M. S. Lie.

Considérons, dans le plan des (x, y) , les transformations homologiques ayant pour centre d'homologie le point O, et pour axe d'homologie une droite passant par ce point O. Ces transformations forment un groupe à deux paramètres, dont nous allons chercher les équations. Remarquons d'abord que les transformations homologiques qui ont le point O pour centre d'homologie sont les transformations homographiques qui laissent

invariante chaque droite passant par l'origine. Ces transformations sont donc définies par les équations

$$(1) \quad x' = \frac{x}{ax + by + c}, \quad y' = \frac{y}{ax + by + c}.$$

L'axe d'homologie relatif à l'une de ces transformations étant une droite, dont chaque point reste invariant par cette transformation, a pour équation

$$ax + by + c = 1.$$

Les transformations particulières que nous cherchons s'obtiennent donc en faisant

$$c = 1$$

dans les équations (1), ce qui donne

$$(2) \quad x' = \frac{x}{ax + by + 1}, \quad y' = \frac{y}{ax + by + 1}.$$

Il est aisé de vérifier que ces équations déterminent un groupe et que ce groupe est engendré par les deux transformations infinitésimales

$$X_1 f = x \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad X_2 f = y \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Nous appellerons ce groupe le groupe *homologique spécial* relatif au point O.

Remarquons que, D et D' étant deux droites quelconques du plan ne passant pas par l'origine, il existe toujours une transformation du groupe, et une seule, vis-à-vis de laquelle les droites D et D' sont homologues. L'axe d'homologie est la droite qui joint le point O au point d'intersection des droites D et D'.

D'une manière générale, soit C' la courbe homologue de C par rapport à une transformation du groupe G. D'après la nature des transformations du groupe G, il est clair que la courbe C ne peut admettre une transformation de ce groupe; donc il n'existe qu'une transformation du groupe changeant C en C'.

2. *Correspondance entre les droites d'un plan et les courbes d'une certaine famille à deux paramètres.* — Considérons dans un plan P un point O, une courbe absolument quelconque C, et une droite D ne passant pas par le point O. Appliquons au couple (C, D) toutes les transforma-

tions du groupe homologique spécial G , relatif au point O . L'ensemble des transformées de D comprend toutes les droites du plan ne passant pas par l'origine O (n° 1); l'ensemble des transformées de C constitue une certaine famille F de courbes à deux paramètres. Cela posé, soit D' une droite quelconque du plan (ne passant pas par l'origine), et soit S la transformation du groupe G qui change D en D' . Faisons correspondre à la droite D' la courbe C' , homologue de C par rapport à S . Nous avons ainsi défini une correspondance entre les droites du plan (ne passant pas par le point O) et les courbes C de la famille F . Il résulte, d'ailleurs, de la remarque faite précédemment (1), que cette correspondance est univoque.

Observons, en outre, que si deux droites, D et D' , se coupent au point A , les courbes correspondantes, C et C' , se coupent en un point situé sur OA . En effet, soit S la transformation du groupe G , qui fait correspondre le couple (C', D') au couple (C, D) ; l'axe d'homologie de cette transformation est évidemment la droite OA . Si donc B est un point d'intersection de OA avec la courbe C , la transformation S doit laisser invariant ce point B , et, par suite, il doit se trouver sur la courbe C' , transformée de C .

3. *Définition des complexes K.* — De la correspondance entre les droites du plan P et les courbes de la famille F , il est aisé de déduire une correspondance univoque entre les mêmes courbes et les droites d passant par le point O , mais non situées dans le plan P . Il suffit pour cela de considérer un *complexe linéaire* H tel que le pôle du plan P soit précisément le point O , et de faire correspondre à chaque courbe C de la famille F la droite d conjuguée de D par rapport au complexe H (*fig. 6*). Puisque la

Fig. 6.



correspondance entre les droites d et D est univoque, ainsi que celle qui existe entre les courbes C et D , il en est de même de la correspondance entre les droites d et les courbes C . Je dirai, dans la suite, qu'une droite d et la courbe C correspondante sont deux lignes *associées*.

Cela posé, remarquons qu'à toutes les droites d situées dans un même plan Q correspondent les droites D du plan P , passant par un point A situé sur l'intersection de P et de Q (A est le pôle du plan Q par rapport au complexe linéaire H). Donc on peut dire, en vertu de ce qui précède, qu'à toutes les droites d situées dans le plan Q correspondent des courbes C se coupant en un point B de la droite OA . De là résulte que les droites rencontrant à la fois deux lignes associées forment un complexe. Tout complexe susceptible de ce mode de génération sera appelé un *complexe K*. Les courbes C seront dites les *directrices du complexe*.

4. *Complexes K de première espèce. Interprétation de l'équation (V).*

— Supposons que la courbe C , qui a été jusqu'à présent complètement indéterminée, soit une courbe V relative au triangle formé par la droite D et deux droites Ox, Oy . Les complexes K , que l'on déduit du couple (D, V) ou des couples analogues situés dans le plan P ou un autre plan de l'espace, constituent une famille particulière de complexes; nous les appellerons *complexes de première espèce*.

Cherchons l'équation générale de ces complexes. A cet effet, considérons l'un d'entre eux, et prenons pour axes des x et des y les deux côtés communs aux triangles liés aux directrices, pour axe des z la droite conjuguée, par rapport au complexe linéaire H , de la droite de l'infini du plan des (x, y) . Pour obtenir les équations des couples (D, V) , il suffit d'appliquer à l'un d'entre eux, (D_0, V_0) , les transformations du groupe homologique spécial relatif au point O . Prenons pour droite D_0 la droite de l'infini; alors la courbe V_0 a pour équation

$$x^m y^n = k, \quad m + n = 1, \quad k \neq 0,$$

et, par suite, les couples (D, V) sont représentés par (*voir* n° 1)

$$(D) \quad \alpha x + \beta y + 1 = 0,$$

$$(V) \quad x^m y^n = k(\alpha x + \beta y + 1).$$

D'autre part, le complexe linéaire H est défini par les tangentes aux courbes intégrales de

$$h dz + x dy - y dx = 0, \quad h \neq 0;$$

donc les équations de la droite conjuguée de D sont

$$(d) \quad y = h\alpha z, \quad x = -h\beta z.$$

La condition pour qu'une droite, représentée par

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

rencontre deux lignes associées (d) et (V), s'exprime alors par l'équation

$$k \left(1 + \frac{bp - aq}{h} \right) = p^m q^n.$$

Les droites du complexe peuvent donc être considérées comme les tangentes aux courbes intégrales de l'équation

$$(1) \quad k \left(dz + \frac{x dy - y dx}{h} \right) = (x dz - z dx)^m (y dz - z dy)^n, \quad m + n = 1.$$

Cette équation dérive, par une transformation homographique, de la forme

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \mu z$$

de l'équation

$$(2) \quad (dz + x dy - y dx) = (x dz - z dx)^m (y dz - z dy)^n.$$

Si maintenant on remplace x, y, z respectivement par $\left(-\frac{x}{z}\right), \left(-\frac{y}{z}\right), \left(-\frac{1}{z}\right)$, l'équation précédente devient

$$dz + x dy - y dx = dx^m dy^n, \quad m + n = 1$$

ou bien

$$(V) \quad \frac{dz + x dy - y dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx} \right)^n,$$

Le calcul précédent montre que, si dans l'équation canonique (V), on effectue la transformation homographique la plus générale, on obtient l'équation générale des complexes K de première espèce.

Le complexe K défini par l'équation (V) a ses directrices dans le plan de l'infini. Les deux côtés communs à tous les triangles liés aux directrices sont les intersections du plan de l'infini avec les plans zOy et zOx .

5. *Groupe d'un complexe K de première espèce.* — Les considérations géométriques qui précèdent mettent en évidence qu'un complexe K de première espèce admet un groupe homographique à quatre paramètres. En effet, il est clair que ce complexe admet les transformations homographiques

qui laissent invariants à la fois le complexe linéaire H et la famille des couples (D, V), qui correspondent au complexe K. Nous allons déterminer ces transformations pour le complexe K défini par l'équation (2).

La famille des couples (D, V) admet évidemment le groupe, à trois paramètres, engendré par les transformations infinitésimales de G (n° 1)

$$X_1 f = x \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad X_2 = y \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

et la transformation infinitésimale

$$X_3 f = n x \frac{\partial f}{\partial x} + (n-1) y \frac{\partial f}{\partial y},$$

qui laisse invariante la courbe V_0

$$(V_0) \quad x^{1-n}, y^n = 1.$$

Considérons maintenant le tableau des transformations infinitésimales homographiques du complexe linéaire (1)

$$dz + x dy - y dx = 0.$$

On aperçoit immédiatement que les transformations du groupe ayant les formes

$$X_1 f + \zeta_1 \frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_2 f + \zeta_2 \frac{\partial f}{\partial z}, \quad X_3 f + \zeta_3 \frac{\partial f}{\partial z}$$

sont les suivantes

$$(1) \quad x \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) + z \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$(2) \quad y \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) - z \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$(3) \quad n \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right);$$

d'autre part, le même groupe contient une transformation infinitésimale (et une seule), laissant invariant chaque point du plan des xy , à savoir

$$(4) \quad -z \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right).$$

(1) Voir *Transformationsgruppen*, t. II, p. 446.

Le complexe K considéré admet donc le groupe défini par les quatre transformations (1), (2), (3), (4). Si maintenant on remplace x, y, z respectivement par $-\frac{x}{z}, -\frac{y}{x}$ et $-\frac{1}{z}$, le groupe devient

$$(G) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + x \frac{\partial f}{\partial z}, \\ n \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) - \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right), \end{array} \right.$$

et l'équation (2) a pour transformée l'équation (V). Donc l'équation (V) admet le groupe G; nous avons vu d'ailleurs qu'il ne peut admettre un groupe d'ordre plus élevé.

6. *Complexes K de seconde espèce. Interprétation de l'équation (VI).*
— Nous avons vu qu'un complexe de première espèce est un complexe K dont les directrices sont des courbes V appartenant à des triangles ayant deux côtés communs. Supposons maintenant ces côtés confondus; nous dirons alors que le complexe est un complexe K de seconde espèce.

THÉORÈME. — *Les complexes K de seconde espèce dérivent tous, par une transformation homographique, de l'un quelconque d'entre eux, par exemple du complexe déterminé par les tangentes aux courbes intégrales de l'équation*

$$(VI) \quad \frac{dz + x dy - y dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Considérons un complexe quelconque de seconde espèce; prenons pour plan des (x, y) le plan des directrices, pour origine le sommet commun à tous les triangles (aplatis), liés aux directrices, pour axe des y une droite quelconque Oy du plan et pour axe des z la droite conjuguée, par rapport au complexe linéaire, de la droite de l'infini du plan des xy .

Le complexe linéaire est alors défini par une équation de la forme

$$h dz + x dy - y dx = 0.$$

Comme précédemment, il suffit, pour obtenir les équations des couples (D, V), d'appliquer les transformations du groupe homologique spécial, relatif au point O, à un couple particulier (D₀, V₀). Prenons encore pour

droite D_0 la droite de l'infini; alors la courbe V_0 a pour équations

$$\frac{1}{x'} = ke^{\frac{1}{x}}, \quad z = 0,$$

et par suite les couples (D, V) sont représentés par

$$(D) \quad \begin{cases} \alpha x + \beta y + 1 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

$$(V) \quad \begin{cases} \frac{\alpha x + \beta y + 1}{x} = ke^{\frac{1}{x}}, \\ z = 0. \end{cases}$$

Les équations de la droite d conjuguée d'une droite D sont

$$x = -h\beta z, \quad y = h\alpha z.$$

La condition pour que la droite

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

rencontre deux lignes associées (d) et (V) s'exprime alors par l'équation

$$\frac{1}{p} \left(1 + \frac{bp - aq}{h} \right) = ke^{\frac{q}{p}}.$$

Les droites du complexe défini par cette équation sont évidemment les tangentes aux courbes intégrales de

$$\frac{h dz + x dy - y dx}{h(x dz - z dx)} = ke^{\frac{y dz - z dy}{x dz - z dx}}.$$

On voit donc que le complexe dérive par une transformation homographique de la forme

$$x' = \lambda x, \quad y' = \lambda y, \quad z' = \mu z$$

du complexe de même espèce pour lequel $h = 1$ et $k = 1$, c'est-à-dire du complexe déterminé par l'équation

$$\frac{dz + x dy - y dx}{x dz - z dx} = e^{\frac{y dz - z dy}{x dz - z dx}}.$$

Si maintenant on remplace x, y, z respectivement par

$$\frac{x}{z}, \quad \frac{y}{z}, \quad -\frac{1}{z},$$

ce qui revient à transporter à l'infini, par une transformation homographique, le plan des directrices, on trouve

$$\frac{dz + x \frac{dy}{dx} - y \frac{dx}{dx}}{dx} = \frac{dy}{dx},$$

ce que nous voulions démontrer.

On peut, comme précédemment, démontrer *a priori* qu'un complexe K de seconde espèce admet un groupe homographique à quatre paramètres et que ce groupe est un sous-groupe du complexe linéaire correspondant au complexe K.

7. *Définition des complexes H.* — Considérons une surface quelconque du second degré, et supposons qu'on ait établi, entre les génératrices d'un même système, une *correspondance homographique* quelconque. Cela posé, les droites qui rencontrent à la fois deux génératrices homologues forment évidemment un complexe.

Les génératrices du second système sont toutes des droites du complexe.

La surface du second degré est la surface singulière du complexe.

Tout complexe susceptible de ce mode de génération sera appelé un *complexe H*. Il y a lieu de distinguer les complexes pour lesquels les génératrices doubles de l'homographie sont distinctes de ceux pour lesquels les génératrices doubles sont confondues. Les complexes H de la première catégorie seront dits de *première espèce*, les autres seront dits de *seconde espèce*.

Avant de déterminer les équations de ces complexes, je commencerai par rappeler quelques théorèmes de M. Lie, relatifs aux transformations homographiques qui laissent invariante une surface du second degré non décomposable.

Considérons la surface représentée par l'équation

$$(S) \quad xy + z = 0.$$

Les transformations infinitésimales qui laissent invariante cette surface forment un groupe à six paramètres, défini par les transformations infinitésimales

$$\begin{aligned} X_1 f &= \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial z}, & X_2 f &= x \frac{\partial f}{\partial x} + z \frac{\partial f}{\partial z}, & X_3 f &= x^2 \frac{\partial f}{\partial x} + (xy + z) \frac{\partial f}{\partial y} + xz \frac{\partial f}{\partial z}, \\ X_4 f &= y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}, & X_5 f &= (xy + z) \frac{\partial f}{\partial x} + y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + yz \frac{\partial f}{\partial z}, & X_6 f &= \frac{\partial f}{\partial y} - x \frac{\partial f}{\partial z}, \end{aligned}$$

Les trois premières transformations infinitésimales déterminent un sous-groupe Γ_1 de G , les trois dernières forment également un sous-groupe Γ_2 .

Les transformations du groupe Γ_1 laissent invariante *chacune* des génératrices d'un même système

$$(D) \quad y = \lambda, \quad \lambda x + z = 0.$$

Les transformations du groupe Γ_2 , au contraire, échangent ces droites entre elles. Le groupe en λ , conjugué du groupe Γ_2 , est engendré par les trois transformations infinitésimales

$$\lambda \frac{df}{d\lambda}, \quad \lambda^2 \frac{df}{d\lambda}, \quad \frac{df}{d\lambda},$$

qui correspondent respectivement à $X_4 f$, $X_5 f$, $X_6 f$.

De ce que le groupe conjugué est un groupe à trois paramètres résulte ce fait, que nous utiliserons à l'instant :

Étant donnés deux couples quelconques (D_1, D'_1) et (D_2, D'_2) de génératrices D , il existe toujours une transformation du groupe Γ_2 (et même une infinité simple) qui transforme D_1 en D'_1 et D_2 en D'_2 .

Cela posé, revenons aux complexes H de première espèce.

8. *Complexes H de première espèce.* — Un de ces complexes est complètement déterminé quand on donne la surface singulière S , les deux génératrices doubles de l'homographie et le rapport anharmonique k qui caractérise l'homographie.

THÉORÈME. — *Les complexes H de première espèce, qui correspondent au même rapport anharmonique, dérivent tous, par une transformation homographique, de l'un quelconque d'entre eux, par exemple du complexe déterminé par les tangentes aux courbes intégrales de l'équation*

$$(VII) \quad (dz + x dy - y dx)^3 + 4h(y dz - z dy) dx = 0.$$

En effet, considérons un quelconque de ces complexes et effectuons une première transformation homographique qui transforme la surface singulière du complexe en la surface suivante

$$(Σ) \quad xy + z = 0.$$

Le complexe transformé est un complexe de même espèce ayant pour

surface singulière Σ . Soient alors

$$(D) \quad y = \lambda, \quad \lambda x + z = 0$$

les équations des génératrices liées par une homographie. Par une seconde transformation homographique, qui n'altère ni la surface Σ , ni l'ensemble des droites D , nous pouvons, comme on a vu, amener les deux génératrices doubles à coïncider avec les génératrices correspondantes aux valeurs $\lambda = 0$ et $\lambda = \infty$. Au complexe H transformé correspond alors une homographie définie par une équation de la forme

$$\lambda' = k\lambda''.$$

La condition pour que la droite

$$x = az + p, \quad y = bz + q,$$

coupe la droite D est exprimée par l'équation

$$a\lambda^2 + \lambda(1 + bp - aq) - q = 0 :$$

donc l'équation du complexe est

$$(1 + bp - aq)^2 + \left(k + \frac{1}{k} + 2\right)aq = 0$$

ou bien

$$(1 + bp - aq)^2 + 4haq = 0, \quad \text{où} \quad 4h = k + \frac{1}{k} + 2.$$

Le complexe représenté par cette équation est précisément celui des tangentes aux courbes intégrales de l'équation (VII). Le théorème est donc démontré.

De la définition d'un complexe H de première espèce résulte immédiatement qu'il admet un groupe homographique à quatre paramètres. En effet, considérons, pour fixer les idées, le complexe H défini par l'équation (VII).

Ce complexe admet évidemment toutes les transformations homographiques qui laissent invariante la surface du second degré Σ et les deux génératrices doubles de l'homographie. Or les transformations du groupe Γ_1 laissent, comme on a vu, chaque génératrice D invariante; donc le complexe admet le groupe Γ_1 . En outre, la seule transformation infinitésimale de Γ_2 , qui laisse invariantes les génératrices doubles ($\lambda = 0, \lambda = \infty$), est la

transformation infinitésimale $X_i f$ qui a pour conjuguée

$$L f = \lambda \frac{df}{d\lambda} :$$

donc le complexe H considéré admet le groupe défini par les quatre transformations infinitésimales

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad X_3 f, \quad X_4 f.$$

Nous avons vu, d'ailleurs, que ce complexe n'admet pas de groupe d'ordre plus élevé.

Ainsi, pour former le groupe d'un complexe H de première espèce, il suffit de déterminer les transformations homographiques qui laissent invariantes la surface singulière du complexe et les génératrices doubles de l'homographie correspondant au complexe.

Si, dans l'équation (VII) qui contient déjà un paramètre h , on effectue la transformation homographique la plus générale, on obtient l'équation du complexe H le plus général. Cette équation contient à la vérité seize paramètres; mais, comme le groupe de l'équation est à quatre paramètres, douze seulement sont essentiels.

Cas particulier. — Si

$$k = 1, \quad \text{d'où} \quad h = 1,$$

c'est-à-dire, si chaque génératrice est à elle-même son homologue, le complexe (VII) est celui des tangentes de la surface Σ . Ce complexe admet évidemment le groupe à six paramètres G : donc il admet également un groupe à dix paramètres.

Remarquons d'ailleurs que, si l'on effectue dans l'équation (VII) la transformation homographique

$$x = \frac{x' + i y'}{i - z'}, \quad y = \frac{x' - i y'}{i - z'}, \quad z = \frac{i + z'}{i - z'},$$

on obtient un complexe H de même espèce, défini par l'équation (voir p. 100)

$$dz' + x' dy' - y' dx')^2 + h(dx' + y' dz' - z' dy')^2 + h(dy' + z' dx' - x' dz')^2 = 0.$$

La surface singulière du complexe est la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 = 0.$$

On retrouve alors ce résultat de M. Klein ⁽¹⁾ :

L'équation

$$(dz + x dy - y dx)^2 + (dx + y dz - z dy)^2 + (dy + z dx - x dz)^2 = 0$$

définit le complexe des tangentes à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

Nous verrons plus loin par quelle transformation ponctuelle cette équation se change en la suivante

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0.$$

9. Complexes H de seconde espèce.

THÉORÈME. — *Tous les complexes H de seconde espèce dérivent, par une transformation homographique, de l'un quelconque d'entre eux, par exemple, du complexe défini par l'équation*

$$(VIII) \quad (dz + x dy - y dx)^2 + 4(dx + y dz - z dy) dx = 0.$$

En effet, considérons un complexe quelconque H de seconde espèce et effectuons encore une transformation homographique qui le change en un complexe ayant pour surface singulière

$$(Σ) \quad xy + z = 0.$$

Soient alors

$$(D) \quad y = \lambda, \quad \lambda x + z = 0$$

les équations des génératrices, qui sont liées par une homographie.

Une seconde transformation homographique, n'altérant ni la surface Σ, ni l'ensemble des droites D, permet, comme nous avons vu, d'amener le rayon double unique de l'homographie à coïncider avec la génératrice correspondante à $\lambda = \infty$.

L'homographie qui correspond au complexe H transformé est alors défini par une équation de la forme

$$\lambda' - \lambda'' = 2k, \quad k \neq 0.$$

⁽¹⁾ KLEIN, *Mathematische Annalen*, t. V.

La condition pour que la droite

$$x = az + p, \quad y = bz + q$$

rencontre deux génératrices homologues est alors exprimée par l'équation

$$(1 + bp - aq)^2 + 4aq - 4k^2q^2 = 0.$$

Cette équation représente le complexe des tangentes aux courbes intégrales de

$$(dz + x dy - y dx)^2 + 4(y dz - z dy) dx - 4k^2 dx^2 = 0.$$

Il suffit maintenant de remplacer y et z respectivement par iky et ikz pour obtenir l'équation (VIII) et le théorème est démontré.

Remarquons, d'ailleurs, que la dernière transformation homographique n'altère ni la surface Σ , ni l'ensemble des droites D , ni la génératrice double de l'homographie. Donc la surface singulière du complexe (VIII) est encore la surface Σ ; la génératrice double unique de l'homographie est la génératrice correspondant à $\lambda = \infty$. Enfin le nombre k qui caractérise l'homographie est égal à i .

On verrait, comme précédemment, que, pour former le groupe d'un complexe H de seconde espèce, il suffit de déterminer les transformations homographiques, qui laissent invariantes la surface singulière et, sur cette surface, une génératrice et une seule, à savoir la génératrice double (unique) de l'homographie correspondante au complexe.

Si, dans l'équation (I), on effectue la transformation homographique la plus générale, on obtient l'équation du complexe H de deuxième espèce le plus général. Cette équation contient quinze paramètres; mais, comme le groupe de l'équation est à quatre paramètres, onze seulement sont essentiels ⁽¹⁾.

10. De ce qui précède résulte que :

Toute équation aux dérivées partielles qui admet un groupe à quatre paramètres dérive par une transformation ponctuelle d'une équation pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales déterminent un complexe I (voir p. 78), un complexe H ou un complexe K.

⁽¹⁾ Les complexes H se confondent avec les complexes $[111(111)]$ et $[111(12)]$ signalés par M. Weiler (*Math. Ann.*, t. VII, p. 168 et 178).

CHAPITRE IX.

SUR LES CARACTÉRISTIQUES DES ÉQUATIONS CANONIQUES. COURBES GAUCHES QUI ADMETTENT UNE TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE INFINITÉSIMALE.

Les caractéristiques des équations canoniques appartiennent à la famille des courbes gauches, étudiée par MM. Sophus Lie et Klein, qui admettent une transformation homographique infinitésimale ⁽¹⁾. Je me propose, dans ce Chapitre, de classer ces courbes et d'indiquer ensuite la catégorie à laquelle appartiennent les caractéristiques d'une équation canonique donnée. La méthode que je vais suivre est la généralisation de celle qui a été indiquée par M. Sophus Lie pour la détermination des courbes V planes (*voir* page 66).

1. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes d'un point quelconque de l'espace.

Une transformation homographique infinitésimale quelconque est définie par le symbole

$$Xf = \sum_{k=1}^4 \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \quad \text{avec} \quad \xi_k = \sum_{i=1}^4 a_{ki} x_i.$$

Cette transformation infinitésimale (et, par suite, le groupe à un paramètre qu'elle engendre) laisse invariants des points (x_1, x_2, x_3, x_4) et des plans (u_1, u_2, u_3, u_4) de l'espace. Ces points et ces plans sont définis par les équations ⁽²⁾

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 a_{ki} x_i &= \lambda x_k, & k &= 1, 2, 3, 4, \\ \sum_{k=1}^4 a_{ki} u_k &= \lambda u_i, & i &= 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

$$\Phi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (1870).

⁽²⁾ *Transformationsgruppen* (t. I, p. 580, 581, etc.).

Remarquons qu'à une racine λ qui n'annule pas les mineurs du troisième degré correspondent un seul point invariant et un seul plan invariant.

Cela posé, à l'égard de ces points et de ces plans invariants, nous allons démontrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Tout point invariant correspondant à une racine λ de l'équation*

$$(1) \quad \Phi(\lambda) = 0$$

se trouve dans tout plan invariant correspondant à une racine λ' différente de λ .

En effet, soient

$$(2) \quad \sum_i a_{ki} x_i = \lambda x_k, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

les équations qui déterminent les points invariants correspondant à la racine λ , et soient

$$(3) \quad \sum_k a_{ki} u_k = \lambda' u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

les équations qui déterminent les plans invariants correspondant à la racine λ' .

De l'équation (3), on déduit

$$\sum_i \sum_k a_{ki} u_k x_i = \lambda' \sum_i u_i x_i$$

et, par suite,

$$\sum_k u_k \left(\sum_i a_{ki} x_i \right) = \lambda' \sum_i u_i x_i$$

ou bien

$$\lambda \sum_k u_k x_k = \lambda' \sum_i u_i x_i,$$

ou encore

$$(\lambda' - \lambda) \sum_i u_i x_i = 0.$$

Comme λ' est différent de λ , cette égalité exige que

$$\sum_i u_i x_i = 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

THÉOREME II. — *Soit λ une racine de l'équation*

$$(1) \quad \Phi(\lambda) = 0,$$

qui n'annule pas tous les mineurs du troisième degré. Pour que le point invariant qui correspond à cette racine se trouve dans le plan invariant correspondant à la même racine, il faut et il suffit que la racine λ soit une racine multiple.

Il est clair que nous pouvons, sans particulariser la question, supposer le point invariant M au sommet ($x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$) du tétraèdre de référence, c'est-à-dire

$$a_{14} = 0, \quad a_{24} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{44} = \lambda.$$

Le plan invariant P correspondant à cette racine est déterminé par les trois équations

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + a_{41}u_4 = 0 \\ a_{12}u_1 + (a_{22} - \lambda)u_2 + a_{32}u_3 + a_{42}u_4 = 0 \\ a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + (a_{33} - \lambda)u_3 + a_{43}u_4 = 0 \end{array} \right\} a_{44} = \lambda.$$

Ces équations ne déterminent effectivement qu'un plan invariant, car il résulte de l'hypothèse faite sur λ que les déterminants du troisième degré du Tableau des coefficients ne sont pas tous nuls. En outre, si D_1, D_2, D_3, D_4 désignent les déterminants du troisième ordre, obtenus en supprimant successivement la première colonne, la deuxième, ..., les coefficients u_1, u_2, u_3, u_4 du plan invariant

$$(P) \quad u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

sont déterminés par les équations

$$u_1 = \rho D_1, \quad u_2 = -\rho D_2, \quad u_3 = \rho D_3, \quad u_4 = -\rho D_4, \quad \rho \neq 0.$$

Cela posé, pour que le plan (P) passe par le point (M), il faut et il suffit que

$$u_4 = 0$$

ou bien

$$D_4 = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Cette égalité exprime précisément que λ est une racine multiple de l'équation (1).

Je vais maintenant démontrer un troisième théorème, qui nous permettra de diminuer considérablement le nombre des cas à distinguer dans la recherche des courbes V de l'espace.

THÉORÈME III. — *Si l'équation en λ admet une racine qui annule tous les mineurs du troisième degré, chacune des courbes qui admettent la transformation infinitésimale Xf est une courbe plane.*

En effet, les courbes qui admettent la transformation infinitésimale Xf sont déterminées par les équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \xi_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Supposons qu'une racine λ de l'équation en λ annule tous les mineurs du troisième degré, et cherchons une intégrale particulière du système (1) ayant la forme

$$x_i = A_i e^{\lambda t}, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

les constantes A_i sont données par les équations

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda) A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3 + a_{14} A_4 &= 0, \\ a_{21} A_1 + (a_{22} - \lambda) A_2 + a_{23} A_3 + a_{24} A_4 &= 0, \\ a_{31} A_1 + a_{32} A_2 + (a_{33} - \lambda) A_3 + a_{34} A_4 &= 0, \\ a_{41} A_1 + a_{42} A_2 + a_{43} A_3 + (a_{44} - \lambda) A_4 &= 0, \end{aligned}$$

Eu égard à l'hypothèse faite sur λ , ces équations admettent certainement deux solutions distinctes

$$A_i = \alpha_i, \quad A_i = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Si donc on désigne par a, b, c, d quatre constantes arbitraires, l'intégrale générale du système (1) a la forme

$$x_i = (a\alpha_i + b\beta_i) e^{\lambda t} + c_i \varphi(t) + d_i \psi(t),$$

où c_i et d_i désignent des fonctions linéaires de c et d .

Considérons une courbe intégrale correspondant à des valeurs détermi-

nées de a, b, c, d , il est clair que cette courbe est située dans le plan

$$\begin{vmatrix} a\alpha_1 + b\beta_1 & c_1 & d_1 & x_1 \\ a\alpha_2 + b\beta_2 & c_2 & d_2 & x_2 \\ a\alpha_3 + b\beta_3 & c_3 & d_3 & x_3 \\ a\alpha_4 + b\beta_4 & c_4 & d_4 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

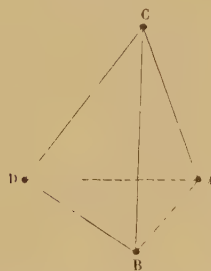
Les courbes V planes ayant déjà été déterminées, nous pourrons, dans la suite, supposer que l'équation en λ n'admet pas de racine annulant les mineurs du troisième degré. Nous commencerons par démontrer que toutes les transformations Xf , satisfaisant à cette condition, sont semblables homographiquement à cinq d'entre elles.

2. Soit Xf une transformation homographique infinitésimale et supposons que l'équation λ n'admette pas de racine annulant les mineurs du troisième degré. Je vais étudier successivement les cinq cas suivants :

Premier cas. — L'équation en λ a quatre racines simples : $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Les théorèmes I et II montrent que les quatre points et plans invariants

Fig. 7.



forment un tétraèdre $ABCD$ (fig. 7). La transformation Xf est alors homographiquement semblable à

$$\lambda_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_3 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_4 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4},$$

qui laisse invariant le tétraèdre de référence. Cette transformation est d'ailleurs équivalente à

$$(\lambda_1 - \lambda_4) x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_2 - \lambda_4) x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_3 - \lambda_4) x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

Comme, par hypothèse, la racine λ_3 n'annule pas les mineurs du troisième degré, on doit supposer

$$\mu \neq 0.$$

Xf est semblable, homographiquement, à la transformation $X'f$, ou à la transformation équivalente

$$X''f = (\lambda_1 - \lambda_3)x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \mu x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Cette dernière est semblable à la transformation

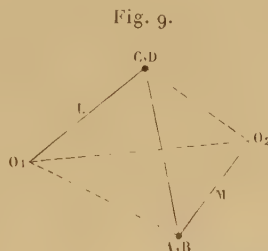
$$(2) \quad X_2 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + m x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3};$$

il suffit, pour le voir, de remplacer dans $X'f$ la variable x_4 par $\frac{(\lambda_1 - \lambda_3)x_4}{\mu}$, ce qui revient à déplacer le point O sur la droite CL.

(Les droites qui admettent la transformation infinitésimale Xf sont ici les arêtes du trièdre C et la droite AB.)

Troisième cas. — L'équation en λ a deux racines doubles, λ_1 et λ_2 .

A ces racines correspondent respectivement deux points invariants (A, B) et (C, D), et deux plans invariants passant par AC (*fig.* 9).



Soit O_1 un point quelconque du plan correspondant à λ_1 , et soit, de même, O_2 un point situé dans le plan correspondant à λ_2 . Par une transformation homographique convenable, on peut faire coïncider le tétraèdre de référence avec le tétraèdre $O_1 O_2 A C$. Soient

$$(O_1 A C) \quad x_1 = 0, \quad (O_1 O_2 C) \quad x_2 = 0, \quad (O_1 O_2 A) \quad x_3 = 0, \quad (A C O_2) \quad x_4 = 0$$

les équations des faces. La transformation Xf prend alors la forme

$$X'f = \lambda_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a x_1 + \lambda_1 x_2 + b x_4) \frac{\partial f}{\partial x_2} + (a' x_1 + \lambda_2 x_3 + b' x_4) \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

T.

et, en outre,

$$ab' \neq 0;$$

car, par hypothèse, l'équation en λ n'admet pas de racine annulant les mineurs du troisième degré.

Remarquons que la transformation réduite

$$A'f = (\lambda_1 x_2 + b x_4) \frac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_2 x_3 + b' x_4) \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

indique l'effet produit par la transformation Xf sur les points du plan $x_4 = 0$. Or on voit immédiatement que les éléments (points et droites) invariants, qui correspondent à $A'f$, sont : un point simple A, un point double (C, D), une droite double (AC, AD), une droite simple passant par le point C. Cette dernière est représentée par

$$(L) \quad x_4 = 0, \quad (\lambda_1 - \lambda_2) x_2 + b x_4 = 0.$$

De même, la transformation $X'f$ laisse invariante, dans le plan $x_4 = 0$, une droite M passant par A et représentée par

$$x_4 = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda_1) x_3 + a' x_4 = 0.$$

En particulier, si l'on a choisi les points O_1 et O_2 sur les droites invariantes L et M, la transformation $X'f$ a la forme plus simple

$$\lambda_1 x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a x_1 + \lambda_1 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_2 x_3 + b' x_4) \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4},$$

ou la forme équivalente

$$X''f = (\lambda_1 - \lambda_2) x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + [a x_1 + (\lambda_1 - \lambda_2) x_2] \frac{\partial f}{\partial x_2} + b' x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Si maintenant on remplace x_1 , x_4 respectivement par

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2) x_1}{a}, \quad \frac{(\lambda_1 - \lambda_2) x_4}{b'},$$

la transformation $X''f$ devient

$$(3) \quad X_3 f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_1 + x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_4 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

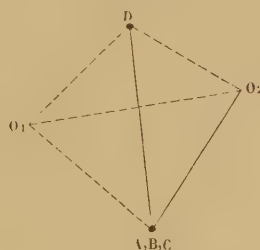
Donc, dans ce cas, la transformation Xf est semblable, homographique -

ment, à $X_3 f$. (Les droites invariantes, qui correspondent à $X f$, sont au nombre de trois.)

Quatrième cas. — L'équation en λ a une racine simple λ_1 , et une racine triple λ_2 . A la racine triple correspond un point invariant (A, B, C) et un plan invariant passant par ce point (théorème II). A la racine λ_1 correspond un point invariant D situé dans le plan précédent, et un plan invariant passant par A, mais non par D (voir théorèmes I et II).

Soient $O_1 O_2 A$ et ADO_2 les deux plans invariants (*fig. 10*). Par une

Fig. 10.



transformation homographique, on peut faire coïncider le tétraèdre de référence avec le tétraèdre $A O_1 O_2 D$. Soient

$$\begin{array}{ll} (O_1 O_2 A) & x_3 = 0, \\ (A O_1 D) & x_1 = 0, \end{array} \quad \begin{array}{ll} (A D O_2) & x_4 = 0, \\ (O_1 O_2 D) & x_2 = 0 \end{array}$$

les équations des faces. La transformation $X f$ prend la forme

$$X'f = (\lambda_2 x_1 + a_{14} x_4) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{21} x_1 + \lambda_2 x_2 + a_{24} x_4) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}$$

et, en outre,

$$a_{21} a_{14} \neq 0;$$

car, par hypothèse, l'équation en λ n'admet pas de racine annulant tous les mineurs du troisième degré.

Si l'on remplace x_4 par $x_4 + \alpha x_1$ (ce changement de variables équivaut à une rotation du plan $O_1 A D$ autour de AD), α étant une constante convenablement choisie, la transformation précédente prend la forme

$$(\lambda_2 x_1 + a_{14} x_4) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{21} x_1 + \lambda_2 x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda_1 x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_2 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4}.$$

ou la forme équivalente

$$X''f = a_{14}x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{21}x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + (\lambda_1 - \lambda_2)x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Les trois coefficients a_{14} , a_{21} , $\lambda_1 - \lambda_2$ étant différents de zéro, on peut déterminer α , β , de manière que la transformation $X''f$ devienne

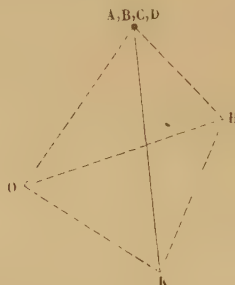
$$(4) \quad X_4f = x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3},$$

quand on remplace x_1 et x_4 respectivement par αx_1 et βx_4 .

Donc, dans ce cas, la transformation Xf est réductible à la forme (4) (par une substitution homographique). Les droites qui admettent la transformation infinitésimale Xf se réduisent ici à deux.

CINQUIÈME CAS. — *L'équation en λ a une racine quadruple λ_1 .* — A cette racine correspond (théorème II) un point invariant (A, B, C, D) et un plan P invariant passant par ce point (*fig. 4*). On sait d'ailleurs que,

Fig. 11.



parmi les droites du plan P qui passent par A, il en existe certainement une AK qui admet la transformation infinitésimale Xf ⁽¹⁾. Cela posé, effectuons une transformation homographique qui fasse coïncider le plan

$$x_4 = 0,$$

avec le plan invariant P, le point

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

⁽¹⁾ Cela résulte immédiatement de ce qu'un groupe homographique, à une variable x , laisse invariant un point (au moins) de l'axe des x .

avec le point invariant A, et la droite

$$x_1 = 0, \quad x_4 = 0$$

avec la droite AK. Alors la transformation Xf prend la forme

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 x_1 + a_{14} x_4) \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{21} x_1 + \lambda_1 x_1 + a_{24} x_4) \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ & + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + \lambda_1 x_3 + a_{34} x_4) \frac{\partial f}{\partial x_3} + \lambda_1 x_4 \frac{\partial f}{\partial x_4} \end{aligned}$$

ou la forme équivalente

$$X'f = a_{14} x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{21} x_1 + a_{24} x_4) \frac{\partial f}{\partial x_2} + (a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{34} x_4) \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

En outre, pour une raison déjà donnée, on doit avoir

$$a_{14} a_{21} a_{32} \neq 0.$$

Je vais démontrer que la transformation $X'f$ est semblable, homographiquement à celle que l'on obtient, en supposant les trois coefficients a_{14} , a_{21} , a_{32} égaux à l'unité et les autres nuls. A cet effet, remplaçons dans $X'f$ la variable x_3 par $x_3 + \alpha x_1 + \beta x_2$. En choisissant α et β convenablement, on arrive à mettre la transformation sous la forme

$$a_{14} x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (a_{21} x_1 + a_{24} x_4) \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_{32} x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Effectuons un nouveau changement de variables homographique; remplaçons x_1 par $x_1 + \rho x_4$, où ρ est donné par

$$a_{21} \rho + a_{24} = 0.$$

La transformation infinitésimale précédente devient

$$a_{14} x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + a_{21} x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + a_{32} x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Enfin remplaçons x_1 , x_2 , x_4 respectivement par αx_1 , βx_2 , γx_4 ; en choisissant α , β , γ convenablement, on parvient à la transformation suivante

$$(5) \quad X_3 f = x_4 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}.$$

Ainsi la transformation considérée Xf est, dans le cas actuel, semblable à la transformation X_5f . (La transformation Xf laisse invariante une droite et une seule.)

En résumé, une transformation homographique infinitésimale (de l'espace à trois dimensions), pour laquelle l'équation en λ n'admet pas de racine annulant les mineurs du troisième degré, est semblable homographiquement à l'une des cinq suivantes :

$$\begin{array}{lcl} (1) & \left| \right. & X_1f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + m x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + p x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \\ (2) & & X_2f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + m x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \\ (3) & & X_3f = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + (x_1 + x_2) \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \\ (4) & & X_4f = x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_3 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \\ (5) & \left. \right| & X_5f = x_3 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \end{array}$$

qui s'écrivent en coordonnées non homogènes de la manière suivante :

$$\begin{array}{lcl} (1) & & X_1f = x \frac{\partial f}{\partial x} + m y \frac{\partial f}{\partial y} + p z \frac{\partial f}{\partial z} \quad m \neq p \neq 1, \quad mp \neq 0, \\ (2) & & X_2f = x \frac{\partial f}{\partial x} + m y \frac{\partial f}{\partial y} + p z \frac{\partial f}{\partial z} \quad m \neq 0, 1, \\ (3) & & X_3f = x \frac{\partial f}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}, \\ (4) & & X_4f = \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z}, \\ (5) & & X_5f = \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial z}. \end{array}$$

3. *Courbes gauches qui admettent une transformation infinitésimale homographique.* — D'après ce qui précède, nous pouvons affirmer que toute courbe gauche, admettant une transformation homographique infinitésimale, est une transformée homographique d'une courbe admettant l'une des cinq transformations infinitésimales *canoniques*.

1° Cherchons d'abord les courbes qui admettent la transformation infi-

nitésimale $X_1 f$, ces courbes intégrales de

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{my} = \frac{dz}{pz},$$

c'est-à-dire les suivantes

$$y = Ax^m, \quad z = Bx^p.$$

Donc :

Toute courbe gauche admettant une transformation infinitésimale homographique de la première classe est une transformée homographique de la courbe gauche

$$y = x^m, \quad z = x^p \quad m \neq p \neq 1, \quad mp \neq 0.$$

2° *De même, toute courbe gauche admettant une transformation infinitésimale homographique de la deuxième classe est une transformée homographique de la courbe gauche*

$$y = x^m, \quad z = \mathfrak{L}^p x, \quad m \neq 0 \quad \text{et} \quad 1.$$

3° *Toute courbe admettant une transformation infinitésimale de la troisième classe est une transformée homographique de la courbe gauche*

$$y = x \mathfrak{L}^2 x, \quad z = \mathfrak{L}^2 x$$

ou

$$y = xz, \quad x = e^z.$$

4° *Toute courbe admettant une transformation infinitésimale homographique de la quatrième classe est une transformée homographique de la courbe gauche*

$$y = \frac{1}{2}x^2, \quad z = e^x.$$

5° *Enfin la famille des courbes, qui admettent une transformation homographique infinitésimale de la cinquième classe, est formée par les transformées homographiques de la cubique gauche*

$$y = \frac{4}{2}x^2, \quad z = \frac{4}{6}x^3.$$

Nous allons voir que cette famille est celle de toutes les cubiques gauches de l'espace.

Ainsi les courbes gauches qui admettent une transformation homogra-

phique infinitésimale, courbes que MM. Sophus Lie et Klein ont appelées *courbes V*, peuvent être partagées en cinq catégories essentiellement distinctes. Je me propose d'examiner maintenant combien chacune de ces courbes admet de transformations homographiques infinitésimales. Auparavant, je ferai quelques remarques au sujet des courbes *V* de la première classe.

4. *Remarques relatives aux courbes V de la première classe.* — Ces courbes sont les transformées homographiques des courbes, en nombre doublement infini, représentées par les équations

$$(1) \quad y = x^m, \quad z = x^p \quad m \neq p \neq 1, \quad m \neq p \neq 0.$$

Nous représenterons par le symbole (α, β) la famille des courbes qui correspondent aux valeurs

$$m = \alpha, \quad p = \beta$$

des exposants m et p . L'identité de deux familles (α, β) et (α', β') sera exprimée par l'égalité

$$(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta').$$

Si l'on effectue, dans les équations (1), successivement les transformations homographiques suivantes :

$$\begin{aligned} x' &= x, & y' &= z, & z' &= y, \\ x' &= y, & y' &= x, & z' &= z, \\ x' &= \frac{1}{x}, & y' &= \frac{y}{x}, & z' &= \frac{z}{x}, \end{aligned}$$

on aperçoit que

$$(2) \quad (m, p) = (p, m) = \left(\frac{1}{m}, \frac{p}{m} \right) = (1-m, 1-p).$$

Cela posé, cherchons les familles (m, p) composées de courbes tracées sur des surfaces du second degré (non décomposables).

Soit

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \\ &+ 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0 \end{aligned}$$

l'équation d'une surface du second degré passant par la courbe

$$(1) \quad y = x^m, \quad z = x^p, \quad m \neq p \neq 1, \quad m \neq p \neq 0.$$

Alors on a l'identité

$$\begin{aligned} & \mathbf{A} x^2 + \mathbf{A}' x^{2m} + \mathbf{A}'' x^{2p} \\ & + 2\mathbf{B} x^{m+p} + 2\mathbf{B}' x^{p+1} + 2\mathbf{B}'' x^{m+1} + 2\mathbf{C} x + 2\mathbf{C}' x^m + 2\mathbf{C}'' x^p + \mathbf{D} = 0, \end{aligned}$$

qui exige que deux des dix exposants

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad p, \quad m, \quad p+1, \quad m+1, \quad m+p, \quad 2p, \quad 2m$$

soient égaux, c'est-à-dire que l'on ait (au moins) une des égalités

$$(3) \quad \begin{cases} m = -1, & m = 2, & m = \frac{1}{2}, & m+1 = 2p, & m+p = 2, & m = 2p, \\ p = -1, & p = 2, & p = \frac{1}{2}, & p+1 = 2m, & m+p = 0, & p = 2m, \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} m+p = 1, & p = m+1, \\ & m = p+1. \end{cases}$$

Donc, si une famille (m, p) est composée de courbes tracées sur des surfaces du second degré, on peut affirmer que l'une des égalités précédentes a lieu. Remarquons maintenant qu'en vertu des relations (2), toute famille (m, p) pour laquelle une des égalités (3) a lieu est identique à une famille (m', p') pour laquelle

$$m' = 2.$$

De même, toute famille (m, p) pour laquelle une des égalités (4) a lieu est identique à une famille (m', p') pour laquelle

$$p' = m' + 1.$$

Ainsi chacune des familles cherchées peut être représentée par un des deux symboles

$$\mathbf{F}_1 = (2, p), \quad \mathbf{F}_2 = (m, m+1).$$

La réciproque est évidente : une courbe d'une famille $\mathbf{F}_1$ est tracée sur une surface conique (ou cylindrique); une courbe d'une surface $\mathbf{F}_2$ est tracée sur une surface du second degré de la classe *générale*.

On peut se demander quelles valeurs il faut donner à p et m pour que chacune des courbes considérées soit tracée sur deux (et par suite sur une infinité) surfaces du second degré.

Considérons d'abord les courbes d'une famille $(2, p)$. Soit

$$(5) \quad f(x, y, z) = \mathbf{A} x^2 + \mathbf{A}' y^2 + \dots + \mathbf{D} = 0$$

T.

l'équation d'une surface du second degré passant par la courbe

$$(6) \quad y = x^2, \quad z = x^p, \quad p \neq 0, 1, 2.$$

Les coefficients de $f(x, y, z)$ sont déterminés par l'identité

$$Ax^2 + A'x^4 + A''x^{2p} + 2Bx^{p+2} + 2B'x^{p+1} + 2B''x^3 + 2Cx + 2C'x^2 + 2C''x^p + D = 0.$$

Si les nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad p, \quad p+1, \quad p+2, \quad 2p$$

sont tous distincts, c'est-à-dire si aucune des égalités

$$(7) \quad p = -2, \quad p = -1, \quad p = \frac{1}{2}, \quad p = \frac{3}{2}, \quad p = 3, \quad p = 4$$

n'a lieu, forcément il n'y a qu'une surface du second degré passant par la courbe considérée, à savoir

$$y = x^2.$$

Si au contraire une des égalités (7) a lieu, la famille $(2, p)$ est identique, en vertu des relations (2), à l'une des deux familles

$$\varphi_1 = (2, 3), \quad \varphi_2 = (2, 4).$$

Dans le premier cas, la famille se compose de cubiques gauches; elle contient même, comme nous le verrons, toutes les cubiques gauches. Dans le second cas, la famille se compose des transformées homographiques de la biquadratique à point de rebroussement

$$y = x^2, \quad z = x^4 \quad \text{ou} \quad y = x^2, \quad y^2 = z$$

et contient, comme nous le verrons aussi, toutes les biquadratiques à point de rebroussement.

Considérons maintenant les courbes de la famille $(m, m+1)$. Soit encore

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface du second degré passant par la courbe

$$(8) \quad y = x^m, \quad z = x^{m+1}, \quad m \neq -1, 0, 1.$$

Les coefficients de $f(x, y, z)$ sont déterminés par l'identité

$$0 = Ax^2 + A'x^{2m} + A''x^{2m+2} \\ + 2Bx^{2m+1} + 2B'x^{m+2} + 2B''x^{m+1} + 2Cx + 2C'x^m + 2C''x^{m+1} + D$$

Si les nombres

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad m, \quad m+1, \quad m+2, \quad 2m, \quad 2m+1, \quad 2m+2$$

sont tous distincts, c'est-à-dire si aucune des égalités

$$(9) \quad m = -2, \quad m = -\frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, \quad m = 2$$

n'a lieu, il n'y a qu'une surface du second ordre passant par la courbe considérée, à savoir

$$z = xy.$$

Si, au contraire, une des égalités (9) a lieu, la famille $(m, m+1)$ est identique, en vertu des relations (2), à la famille $(2, 3)$, c'est-à-dire la famille des cubiques gauches.

En résumé, les familles (m, p) qui se composent de courbes tracées sur des surfaces du second degré se partagent en quatre catégories :

La première comprend les cubiques gauches.

La seconde comprend les biquadratiques à point de rebroussement.

La troisième comprend les familles $(2, p)$ qui se composent de courbes, dont chacune est tracée sur une surface du second degré et une seule, la surface étant conique.

La quatrième comprend les familles $(m, m+1)$ dont chaque membre est tracé sur une surface du second degré et une seule, la surface appartenant à la classe générale.

Enfin remarquons que les courbes de la première et de la quatrième catégorie constituent la famille des transformées homographiques des loxodromies de l'espace. En effet, les courbes des deux catégories considérées peuvent être obtenues en appliquant toutes les transformations homographiques aux courbes suivantes

$$y = Ax^m, \quad z = Ax^{m+1}, \quad m \neq 0, 1, -1,$$

c'est-à-dire aux courbes définies par

$$(1) \quad \begin{cases} z = xy, \\ \frac{m-1}{m+1} dz = x dy - y dx. \end{cases}$$

Or, par la substitution homographique

$$x = \frac{x' + iy'}{1 - z'}, \quad y = \frac{x' - iy'}{1 - z'}, \quad z = \frac{1 + z'}{1 - z'},$$

le système (1) se transforme dans le suivant

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \\ i \frac{m-1}{m+1} dz = x' dy' - y' dx', \end{array} \right\} \quad (S)$$

qui représente les loxodromies de la sphère S correspondant aux méridiens passant par l'axe des z' . Les courbes de la première et de la quatrième catégorie sont donc les transformées homographiques des loxodromies (2). Il résulte évidemment de là que ces courbes constituent la famille des transformées homographiques de toutes les loxodromies de l'espace.

5. *Nombre des transformations infinitésimales qui laissent invariante une courbe V.* — Considérons d'abord les courbes V de la première classe. Pour déterminer le nombre des transformations infinitésimales qu'admet une de ces courbes, il suffit évidemment de chercher combien la courbe

$$(1) \quad y = x^m, \quad z = x^p, \quad m \neq p \neq 1, \quad mp \neq 0$$

admet de ces transformations. Soit

$$Xf = \xi \frac{\partial f}{\partial x} + \eta \frac{\partial f}{\partial y} + \zeta \frac{\partial f}{\partial z}$$

une transformation homographique infinitésimale laissant invariante la courbe (1). Les polynômes ξ, η, ζ s'obtiennent en écrivant que les relations

$$\eta = mx^{m-1}\xi, \quad \zeta = px^{p-1}\xi$$

sont vérifiées en chaque point de la courbe (1). Donc les coefficients de ξ, η, ζ sont définis par les identités suivantes :

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 x + b_2 x^m + b_3 x^p &= mx^{m-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^m + a_3 x^p) + (m-1)x^m(\lambda x + \mu x^m + \nu x^p), \\ c_0 + c_1 x + c_2 x^m + c_3 x^p &= px^{p-1}(a_0 + a_1 x + a_2 x^m + a_3 x^p) + (p-1)x^p(\lambda x + \mu x^m + \nu x^p), \end{aligned}$$

qui peuvent prendre la forme

$$(2) \quad \begin{cases} b_0 + b_1 x + (b_2 - m a_1) x^m + b_3 x^p \\ \quad = m x^{m-1} (a_0 + a_2 x^m + a_3 x^p) + (m-1) x^m (\lambda x + \mu x^m + \nu x^p), \\ c_0 + c_1 x + c_2 x^m + (c_3 - p a_1) x^p \\ \quad = p x^{p-1} (a_0 + a_2 x^m + a_3 x^p) + (p-1) x^p (\lambda x + \mu x^m + \nu x^p). \end{cases}$$

Nous sommes alors conduits à distinguer plusieurs cas.

Premier cas. — La courbe (1) n'est pas située sur une surface du second degré. Dans ce cas (*voir* n° 4), si l'on considère les termes de l'une quelconque des identités (2), on aperçoit que les exposants de x dans ces termes sont tous distincts. Par suite,

$$b_2 = m a_1, \quad c_3 = p a_1;$$

quant aux autres coefficients de ξ, η, ζ , ils sont tous nuls, sauf a_1 . Donc la courbe (1) n'admet alors qu'une transformation infinitésimale (homographique), à savoir

$$X_1 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + m y \frac{\partial f}{\partial y} + p z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Deuxième cas. — La courbe (1) est une cubique gauche.

La courbe est alors (*voir* n° 4) une transformée homographique de la courbe

$$(3) \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad z = \frac{x^3}{6}.$$

Un calcul analogue au précédent montre que la cubique (3) admet trois transformations homographiques infinitésimales, à savoir

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_2 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial y} + 3z \frac{\partial f}{\partial z},$$

$$X_3 f = 3x \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) - 4y \frac{\partial f}{\partial x} - 3z \frac{\partial f}{\partial y}.$$

En appliquant à cette cubique les ∞^{15} transformations homographiques de l'espace, on obtient donc une famille de cubiques dépendant de douze paramètres essentiels, c'est-à-dire la famille totale des cubiques gauches de l'espace. Nous parvenons donc à ce résultat déjà annoncé.

L'ensemble des transformées homographiques de la cubique gauche

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad z = \frac{x^3}{6}$$

se compose de toutes les cubiques gauches de l'espace.

Troisième cas. — La courbe (1) est une biquadratique à point de rebroussement. Nous avons vu qu'elle est alors une transformée homographique de

$$(4) \quad y = x^2, \quad z = x^4.$$

En répétant sur ces équations les calculs et raisonnements qui précèdent, on voit d'abord que la courbe (4) n'admet qu'une transformation homographique infinitésimale, ensuite que l'ensemble des transformées homographiques de (4) se compose de toutes les biquadratiques à point de rebroussement.

Quatrième cas. — La courbe (1) est tracée sur une surface de second degré S et une seule.

La courbe est alors (*voir* n° 4) une transformée homographique de

$$(5) \quad y = x^2, \quad z = x^p, \quad \begin{cases} p \neq 0, 1, 2, \\ p \neq -2, -1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 3, 4, \end{cases}$$

ou de

$$(6) \quad y = x^m, \quad z = xy, \quad \begin{cases} m \neq -1, 0, 1, \\ m \neq -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2. \end{cases}$$

Remarquons d'ailleurs que, si une transformation homographique laisse invariante la courbe considérée, elle laisse également invariante la surface S. En effet, si elle transformait S en une autre surface S', la courbe en question serait l'intersection de deux surfaces du second degré, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En ayant égard à cette remarque et aux inégalités (5) et (6), on trouve facilement que la courbe (1) n'admet qu'une transformation homographique infinitésimale.

Passons aux courbes V de la seconde classe, c'est-à-dire aux transformées homographiques de la courbe

$$(1) \quad y = x^m, \quad z = x^2, \quad m \neq 0, 1.$$

Soit Xf une transformation infinitésimale (homographique), qui laisse invariante cette courbe. Les relations

$$\eta = m x^{m-1} \xi, \quad x \xi = \xi$$

doivent être vérifiées en chaque point de la courbe (1) : donc on doit avoir les deux identités en x

$$(2) \quad \begin{cases} b_0 + b_1 x + b_2 x^m + b_3 \xi x \\ = m x^{m-1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^m + a_3 \xi x) + (m-1)(\lambda x + \mu x^m + \nu \xi x) x^m, \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x(c_0 + c_1 x + c_2 x^m + c_3 \xi x) \\ = a_0 + a_1 x + a_2 x^m + a_3 \xi x + (x - x \xi x)(\lambda x + \mu x^m + \nu \xi x). \end{cases}$$

En égalant les coefficients de ξx , dans les deux membres de l'identité (5), on trouve

$$b_3 = m a_3 x^{m-1} + (m-1) \nu x^m,$$

d'où

$$(\alpha) \quad b_3 = 0, \quad a_3 = 0, \quad \nu = 0,$$

car, par hypothèse,

$$m \neq 0, \quad m \neq 1.$$

L'identité (3) donne de même

$$c_3 x = -\lambda x^2 - \mu x^{m+1}$$

ou

$$c_3 + \lambda x + \mu x^m = 0,$$

ce qui exige que

$$(\beta) \quad c_3 = \lambda = \mu = 0.$$

Les identités (2) et (3) deviennent alors

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 x + b_2 x^m &= m x^{m-1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^m), \\ x(c_0 + c_1 x + c_2 x^m) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^m. \end{aligned}$$

De là on déduit, eu égard aux hypothèses faites sur m ,

$$b_2 = m a_1, \quad c_0 = a_1, \quad c_2 = 0$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} b_0 + b_1 x &= m x^{m-1} (a_0 + a_2 x^m), \\ c_1 x^2 &= a_0 + a_2 x^m; \end{aligned}$$

d'où

$$b_0 + b_1 x = m c_1 x^{m+1},$$

c'est-à-dire

$$(\gamma) \quad b_0 = b_1 = c_1 = 0,$$

ce qui entraîne les égalités

$$(\delta) \quad a_0 = a_2 = 0.$$

Les relations (α) , (β) , (γ) , (δ) donnent

$$\xi = a_1 x, \quad \eta = m a_1 y, \quad \zeta = a_1.$$

La courbe (1) n'admet donc que la transformation homographique infinitésimale

$$Xf = x \frac{\partial f}{\partial x} + m y \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Remarque. — Parmi les courbes V de la deuxième classe se trouvent les transformées homographiques des hélices de l'espace. Ceci résulte de ce que la courbe

$$(C) \quad xy = 1, \quad x = e^z,$$

qui correspond à $m = -1$, se transforme, par la substitution linéaire

$$x = x' + iy', \quad y = x' - iy', \quad z = iz',$$

en la courbe suivante

$$x' = \cos \varphi, \quad y' = \sin \varphi, \quad z' = \varphi,$$

qui est évidemment une hélice.

Considérons enfin les courbes de la troisième et de la quatrième classe. Ces courbes sont les transformées homographiques de la courbe

$$y = xz, \quad z = e^x$$

ou de

$$2y = x^2, \quad z = e^x.$$

Des calculs identiques à ceux qui ont déjà été faits plusieurs fois montrent que chacune de ces courbes n'admet qu'une transformation homographique infinitésimale.

Quant aux courbes V de la cinquième classe, elles ont déjà été étudiées; car les cubiques gauches appartiennent aussi à la première classe.

En résumé, toute cubique gauche admet trois transformations homographiques infinitésimales. Les cubiques gauches sont les seules courbes gauches admettant plus d'une transformation homographique infinitésimale.

6. *Caractéristiques des équations canoniques.* — Nous avons déjà vu que les caractéristiques des équations canoniques (I), (II), (III), (IV) sont des droites. Je me propose maintenant d'indiquer la nature des caractéristiques des autres équations canoniques.

Caractéristiques de l'équation

$$(V) \quad \frac{dz + x dy - y dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \quad n \neq -1, 0, 1, 2.$$

Supposons d'abord

$$n \neq \frac{1}{2}.$$

Les caractéristiques sont alors données par les équations (*voir* p. 79)

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{1}{m(m-1)} \left(\alpha + \frac{2x}{n} \right)^m - 2 \frac{\alpha y}{n} + 2 \frac{z - xy}{n^2} \\ \gamma &= \frac{1}{m-1} \left(\alpha + \frac{2x}{n} \right)^{m-1} - \frac{2y}{n} \end{aligned} \right\} \quad m = \frac{2n-1}{n-1} \quad \text{ou} \quad n = \frac{m-1}{m-2}.$$

Considérons, en particulier, la caractéristique correspondant aux valeurs

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Elle a pour équations

$$(C_0) \quad (2n-1)z = xy, \quad y = kx^{\frac{n}{n-1}} \quad \text{avec} \quad k = \frac{n-1}{2} \left(\frac{2}{n} \right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

En lui appliquant toutes les transformations du groupe G de l'équation (V) (*voir* p. 81), on obtient toutes les caractéristiques de l'équation (V). Or on voit que la courbe C_0 est une courbe V de la première classe et de la famille $\left(\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-1} + 1 \right)$ (*voir* p. 128). Donc les caractéristiques sont des courbes V de la première classe. Examinons si ces caractéristiques peuvent être des cubiques gauches; il faut, pour cela, que l'on ait une des

T.

égalités suivantes (p. 131) :

$$\frac{n}{n-1} = -2, \quad \frac{n}{n-1} = -\frac{1}{2}, \quad \frac{n}{n-1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{n}{n-1} = 2.$$

Les deux dernières égalités sont impossibles, eu égard aux hypothèses faites sur n .

Les deux premières sont équivalentes aux suivantes :

$$n = \frac{1}{3}, \quad n = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, pour que les caractéristiques de l'équation (V) soient des cubiques gauches, il faut et il suffit que

$$n = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad n = \frac{2}{3}.$$

Dans tous les autres cas, les caractéristiques sont des courbes V de la première classe et de la quatrième catégorie (*voir* p. 131). On peut dire que, dans tous les cas, les caractéristiques sont des transformées homographiques d'une loxodromie.

Remarquons d'ailleurs que les deux équations

$$\frac{dz + x dy - y dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad \frac{dz + x dy - y dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{\frac{2}{3}}$$

sont homographiquement semblables, car la somme des deux exposants est égale à l'unité (*voir* la note p. 82).

Soit maintenant

$$n = \frac{1}{2}.$$

Les caractéristiques sont alors (p. 80) données par

$$\beta = 8(z - xy) - 2\alpha y - L(\alpha + 8x), \quad \gamma + 2y + \frac{1}{\alpha + 8x} = 0.$$

Comme précédemment, il suffit, pour étudier la nature de ces courbes, de considérer une caractéristique particulière, par exemple

$$16xy + 1 = 0, \quad 8z + Lx = 0,$$

qui est une transformée homographique de

$$xy = 1, \quad z = Lx,$$

Donc les caractéristiques sont des courbes V de la deuxième classe et en particulier (*voir* p. 136) des transformées homographiques d'une hélice.

Caractéristiques de l'équation (VI).

$$(VI) \quad \frac{dz + x dy - y dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}.$$

Si l'on se reporte au calcul qui a été fait (p. 86), on voit que les caractéristiques de cette équation sont représentées par

$$(C) \quad \begin{cases} F(\alpha + 2x) - 2y(\alpha + 2x) + 2z + 2xy = \beta, \\ F'(\alpha + 2x) - 2y = \gamma. \end{cases}$$

Ces courbes peuvent être considérées comme obtenues en appliquant les transformations du groupe de l'équation (VI) à la caractéristique particulière C_0 ,

$$(C_0) \quad 2z = x^2, \quad 2x = e^{\frac{x+y}{x}}, \quad (\alpha = \beta = \gamma = 0).$$

Or cette dernière est une transformée homographique de l'hélice

$$x_1 = \cos \varphi, \quad y_1 = \varphi, \quad z_1 = \sin \varphi;$$

il suffit, pour le voir, de poser

$$x_1 + iz_1 = \frac{1}{2x}, \quad x_1 - iz_1 = \frac{4z}{x}, \quad \frac{x+y}{x} = -iy_1.$$

On voit donc que les caractéristiques de l'équation (VI) sont aussi des transformées homographiques d'une hélice.

Caractéristiques des équations canoniques (VII) et (VII'). — Considérons d'abord l'équation

$$(VII') \quad (dz + x dy - y dx)^2 + 4h(y dz - z dy) dx = 0, \quad h = 0, 1.$$

Les caractéristiques de cette équation peuvent être représentées (*voir* p. 94),

$$(I) \quad \frac{\alpha y + z}{\sqrt{\alpha y + z}} \left(\frac{\alpha - x}{\alpha y + z} \right)^n = \beta, \quad \frac{(1-n)y}{\alpha y + z} + \frac{n}{\alpha - x} = \gamma, \quad 4n(n-1) = h(2n-1)^2.$$

Considérons en particulier les caractéristiques pour lesquelles

$$\alpha = \gamma = 0.$$

Ces caractéristiques sont représentées par

$$(2) \quad nz = (1 - n)xy, \quad xy^{1-2n} = \text{const.}$$

En appliquant à ces caractéristiques les transformations du groupe G de l'équation (VII'), (p. 95), on obtient ⁽¹⁾ toutes les caractéristiques de l'équation (VII'). Or chaque courbe (2) est une transformée homographique de la courbe

$$z = xy, \quad x = y^{2n-1}.$$

Donc les caractéristiques de l'équation (VII') sont des courbes V de la première classe et de la première ou de la quatrième catégorie. Cherchons pour quelles valeurs de h les caractéristiques sont des cubiques gauches. Il faut pour cela (voir p. 131) que l'une des égalités suivantes ait lieu

$$2n - 1 = -2, \quad 2n - 1 = -\frac{1}{2}, \quad 2n - 1 = \frac{1}{2}, \quad 2n - 1 = 2$$

ou

$$n = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad n = \frac{3}{4}, \quad n = \frac{3}{2},$$

c'est-à-dire

$$h = \frac{3}{4} \quad \text{ou} \quad h = -3.$$

Dans tous les autres cas, les caractéristiques sont des courbes V de la première classe et de la quatrième catégorie. On peut dire aussi que les caractéristiques sont, dans tous les cas, des transformées homographiques d'une loxodromie.

Comme l'équation VII dérive de l'équation (VII') par une transformation homographique (p. 100), il en résulte que les caractéristiques de (VII) sont aussi des transformées homographiques d'une loxodromie.

On peut obtenir simplement les caractéristiques de l'équation (VII) en effectuant la transformation déjà utilisée (p. 100) dans le système (2) ou le système équivalent

$$n(xy + z) = xy, \quad dz = x dy - y dx,$$

(1) Cette opération fournit une famille de courbes ne contenant que trois paramètres essentiels, car la famille (2) admet deux transformations infinitésimales de G, à savoir $X_2 f$ et $X_4 f$.

ce qui donne

$$(3) \quad \begin{cases} n(x'^2 + y'^2 + z'^2 + 1) = x'^2 + y'^2, \\ dz' = x' dy' - y' dx, \end{cases}$$

et en appliquant ensuite aux courbes (3) toutes les transformations du groupe de (VII).

Caractéristiques de l'équation canonique (VIII). — Si l'on se reporte au calcul qui a été fait (p. 95), on voit que les caractéristiques de l'équation (VIII') peuvent être représentées par

$$\frac{\alpha y + z}{\sqrt{\alpha y + z}} e^{\frac{\alpha - x}{\alpha y + z}} = \beta, \quad \frac{y}{\alpha y + z} + \frac{\alpha y + z}{(\alpha y + z)^2} = \gamma.$$

En remplaçant dans ces équations x, y, z respectivement par $\frac{z}{y}, \frac{1}{y}, \frac{x}{y}$, on obtient les caractéristiques de l'équation (VIII); on trouve ainsi

$$\frac{x + \alpha}{\sqrt{\alpha y + z}} e^{\frac{\alpha y - z}{x + \alpha}} = \beta, \quad \frac{1}{x + \alpha} + \frac{\alpha y + z}{(x + \alpha)^2} = \gamma.$$

En particulier, considérons les caractéristiques pour lesquelles

$$\alpha = \gamma = 0,$$

c'est-à-dire les courbes représentées par

$$(G_0) \quad \alpha y + z + x = 0, \quad e^y \sqrt{x} = \text{const.}$$

En appliquant à ces courbes les transformations du groupe de l'équation (VIII), on obtient toutes les caractéristiques de l'équation (VIII). Or, les courbes G_0 sont des transformées homographiques de la courbe

$$z = xy, \quad x = e^y.$$

Donc les caractéristiques de l'équation (VIII) sont des courbes V de la troisième classe.



TABLEAU DES ÉQUATIONS CANONIQUES.

$$(I) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

$$(II) \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)^n = \frac{dz}{dx},$$

$$(III) \quad e^{\frac{dy}{dx}} = \frac{dz}{dx},$$

$$(IV) \quad \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dz}{dx},$$

$$(V) \quad \frac{dz + x \, dy - y \, dx}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \quad n \neq -1, 0, 1, 2,$$

$$(VI) \quad \frac{dz + x \, dy - y \, dx}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}},$$

$$(VII) \quad a(dz + x \, dy - y \, dx)^2 + (dx + y \, dz - z \, dy)^2 + (dy + z \, dx - x \, dz)^2 = 0, \\ a \neq 0, \quad a \neq 1.$$

$$(VIII) \quad (dz + x \, dy - y \, dx)^2 + 4 \, dx \, (dx + y \, dz - z \, dy) = 0.$$

Note. — L'équation (VII) peut être remplacée par la suivante

$$(dz + x \, dy - y \, dx)^2 + 4 \, h \, (y \, dz - z \, dy) \, dx = 0, \quad h \neq 0, 1.$$



NOTE.

RÉDUCTION DE PLUSIEURS ÉQUATIONS CONNUES A LA FORME CANONIQUE. TRANSFORMATION PONCTUELLE FAISANT CORRESPONDRE AUX TANGENTES D'UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ LES DROITES RENCONTRANT UNE CONIQUE.

1. Comme exemple d'équation aux dérivées partielles admettant un groupe, je choisirai l'équation pour laquelle les normales aux surfaces intégrales sont tangentes à une sphère ⁽¹⁾

$$(1) \quad (z - px - qy)^2 = (1 + p^2 + q^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1). \quad (\text{MONGE}).$$

Je me propose de montrer que cette équation dérive par une transformation ponctuelle de l'équation canonique

$$(1) \quad 1 + p^2 + q^2 = 0.$$

A cet effet, je considère l'équation *associée* à l'équation (1), qui est évidemment

$$(2) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = (x dx + y dy + z dz)^2.$$

Effectuons la transformation

$$(3) \quad x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta.$$

L'équation (2) se change en la suivante

$$dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2 = r^2 dr^2$$

ou

$$(4) \quad \frac{1 - r^2}{r^2} dr^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\psi^2 = 0.$$

Posons

$$\frac{\sqrt{1 - r^2}}{r} dr = \frac{d\rho}{\rho},$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad i \arcsin \frac{1}{r} + \sqrt{1 - r^2} = \rho.$$

L'équation (4) devient

$$(6) \quad d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\psi^2 = 0$$

(1) Je suppose le centre de la sphère à l'origine et le rayon égal à l'unité.

ou bien

$$(I) \quad dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0,$$

en posant

$$(7) \quad x' = \rho \sin \theta \cos \psi, \quad y' = \rho \sin \theta \sin \psi, \quad z' = \rho \cos \theta.$$

Si donc on effectue dans l'équation canonique (I) la transformation ponctuelle

$$x' = \frac{\rho}{r} x, \quad y' = \frac{\rho}{r} y, \quad z' = \frac{\rho}{r} z,$$

où ρ et r sont définis en fonction de x, y, z au moyen des relations

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = e^{i \arcsin \frac{1}{r} + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}},$$

on trouve précisément l'équation (2). Ce que nous voulions démontrer.

Cette réduction de l'équation (2) à la forme canonique permet d'intégrer cette équation.

Je ne parlerai pas des résultats de cette intégration, qui sont connus depuis longtemps.

2. Parmi les équations, qui sont des transformées ponctuelles de

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0,$$

se trouvent évidemment toutes les équations du second degré non décomposables

$$f(dx, dy, dz) = A dx^2 + A' dy^2 + \dots = 0,$$

à coefficients constants.

Cela posé, considérons l'équation aux dérivées partielles pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales sont les normales aux surfaces homofocales

$$(1) \quad \frac{x^2}{a+u} + \frac{y^2}{b+u} + \frac{z^2}{c+u} = 1 \quad (1).$$

Cette équation a pour *associée* la suivante

$$(2) \quad a dx(y dz - z dy) + b dy(z dx - x dz) + c dz(x dy - y dx) = 0$$

ou bien

$$(b-c)x dy dz + (c-a)y dz dx + (a-b)z dx dy = 0,$$

(1) Consulter, au sujet du complexe déterminé par ces normales, le Mémoire publié par M. Darboux dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II, année 1871.

ou encore

$$(3) \quad (b-c) \frac{dx}{x} + (c-a) \frac{dy}{y} + (a-b) \frac{dz}{z} = 0.$$

Par la transformation

$$x' = \mathcal{L} x, \quad y' = \mathcal{L} y, \quad z' = \mathcal{L} z,$$

l'équation (3) se change en la suivante

$$(4) \quad \frac{b-c}{dx'} + \frac{c-a}{dy'} + \frac{a-b}{dz'} = 0 \quad \text{ou} \quad (b-c) dy' dz' + (c-a) dz' dx' + (a-b) dx' dy' = 0.$$

En vertu de la remarque que nous venons de faire, cette équation dérive par une transformation ponctuelle de l'équation

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = 0.$$

Donc l'équation aux dérivées partielles considérée est une transformée ponctuelle de l'équation canonique

$$1 + p^2 + q^2 = 0.$$

L'équation (2) peut aussi être considérée comme définissant un complexe tétraédral, les faces du tétraèdre étant les trois plans de coordonnées et le plan de l'infini. Tout complexe tétraédral est d'ailleurs une transformée homographique de celui-là. Donc :

Toute équation aux dérivées partielles, pour laquelle les tangentes aux courbes intégrales déterminent un complexe tétraédral est une transformée ponctuelle de l'équation canonique

$$1 + p^2 + q^2 = 0.$$

3. *Transformation ponctuelle faisant correspondre aux tangentes d'une surface du second degré les droites rencontrant une conique.* — Enfin considérons l'équation aux dérivées partielles associée à l'équation

$$(1) \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 + (y dz - z dy)^2 + (z dx - x dz)^2 + (x dy - y dx)^2 = 0 \quad (1).$$

Les tangentes aux courbes intégrales de cette équation sont tangentes à la

(1) Cette équation peut aussi s'écrire

$$(dx + y dz - z dy)^2 + (dy + z dx - x dz)^2 + (dz + x dy - y dx)^2 = 0.$$

C'est sous cette forme que nous l'avons rencontrée plusieurs fois dans ce travail (en particulier, voir p. 100).

sphère

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Je dis que l'équation aux dérivées partielles considérée dérive encore de l'équation $1 + p^2 + q^2 = 0$, par une transformation ponctuelle, ou, ce qui revient au même, que l'équation (1) est une transformée ponctuelle de l'équation

$$(3) \quad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

En effet, effectuons dans l'équation (1) la transformation ponctuelle

$$(4) \quad x = \frac{X}{U}, \quad y = \frac{Y}{U}, \quad z = \frac{Z}{U}, \quad U = \varphi(X, Y, Z),$$

φ désignant une fonction indéterminée. L'équation (1) a pour transformée

$$(dX^2 + dY^2 + dZ^2 + dU^2)(X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2) - (X dX + Y dY + Z dZ + U dU)^2 = 0.$$

Pour que cette équation soit identique à l'équation (3), il suffit que U satisfasse à l'équation

$$(X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2) dU^2 = (X dX + Y dY + Z dZ + U dU)^2$$

ou

$$dU = d\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2};$$

il suffit donc de prendre U de manière que

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 + U^2} = U - 1,$$

c'est-à-dire

$$(5) \quad -U = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2 - 1}{2}.$$

La fonction U étant déterminée par l'équation (5), la transformation (4) change l'équation (1) en l'équation (2), ce que nous voulions démontrer.

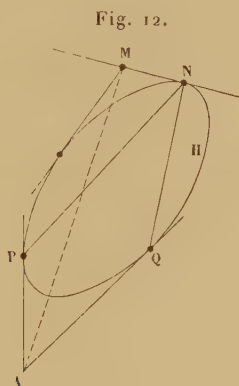
Remarque. — La transformation précédente offre ceci de curieux, qu'elle change les *droites tangentes* à la sphère (2) en *droites rencontrant* le cercle imaginaire de l'infini. Cette transformation est un cas particulier d'une transformation plus générale, faisant correspondre aux tangentes d'une surface du second degré S les droites rencontrant une section plane C de cette surface. Voici cette transformation (1).

Considérons la transformation ponctuelle qui fait correspondre à chaque point $M(x, y, z)$ de l'espace les sommets m et m' des deux cônes qui passent par la

(1) Cette transformation a été utilisée par M. Darboux dans ses recherches sur les cyclides.

conique C et la conique K intersection de S avec le plan polaire de M (*fig. 12*). Cette transformation jouit bien de la propriété en question.

En effet, soit A le pôle du plan de la conique C. Les deux points m, m' doivent évidemment se trouver sur l'intersection des plans tangents à la surface S aux points d'intersection des deux coniques C et K, c'est-à-dire sur la droite conjuguée de l'intersection des deux plans C et K. Or cette droite est précisément la droite AM : donc les deux points m, m' se trouvent sur AM. Cela posé, considérons une droite quelconque MN tangente en N à la surface S et faisons passer un plan par le point A et la droite MN. Ce plan coupe la surface S suivant une



conique H et la conique C en deux points P et Q. Il résulte immédiatement de la remarque qui vient d'être faite que les points m et m' qui correspondent à un point M de la droite MN doivent se trouver aux points d'intersection de AM avec les droites NP et NQ. On peut donc dire que la transformation considérée fait correspondre aux points de la droite MN les points des deux droites NP et NQ et, par suite, à l'ensemble des tangentes de la surface S, l'ensemble des droites rencontrant la conique C.

Supposons en particulier que la surface S soit la sphère représentée par l'équation

$$(S) \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1 = 0,$$

et que la conique C soit le centre imaginaire de l'infini. Soient $m(x, y, z)$ et $M(X, Y, Z)$ deux points correspondants. Pour trouver les relations qui lient les six quantités (x, y, z, X, Y, Z) , il suffit d'écrire que la sphère de rayon nul

$$(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2 = 0$$

passé par l'intersection de la sphère S avec le plan polaire du point M, c'est-

à-dire que les deux équations

$$x\xi + y\eta + z\zeta + 1 = 0,$$

$$(\xi - X)^2 + (\eta - Y)^2 + (\zeta - Z)^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + 1$$

représentent le même plan. On obtient ainsi les équations

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z} = \frac{2}{1 - X^2 - Y^2 - Z^2},$$

qui sont identiques, comme je l'ai annoncé, aux équations (4) et (5).

Vu et approuvé :

Paris, le 8 mai 1891.

LE DOYEN,

G. DARBOUX

Permis d'imprimer :

Paris, le 8 mai 1891.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Étude des mouvements dans lesquels il y a une fonction des forces. — Principe d'Hamilton. — Principe de la moindre action. — Analogies avec la théorie des lignes géodésiques.

Vu et approuvé :

Paris, le 8 mai 1891.

LE DOYEN,

G. DARBOUX.

Permis d'imprimer :

Paris, le 8 mai 1891.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

	Pages
CHAPITRE I. — Notions préliminaires.....	4
CHAPITRE II. — Sur les caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles non linéaire $F(x, y, z, p, q) = 0$. Correspondance entre ces équations et les équations différentielles ordinaires du troisième ordre à deux variables.....	9
CHAPITRE III. — Généralités sur les équations aux dérivées partielles $F(x, y, z, p, q) = 0$ qui admettent un groupe continu de transformations.....	19
CHAPITRE IV. — Recherche des équations différentielles du troisième ordre $H(x, y, y', y'', y''') = 0$ qui admettent un groupe de transformations de contact.....	36

SECONDE PARTIE.

CHAPITRE I. — Équations aux dérivées partielles qui admettent un groupe à dix paramètres.	41
CHAPITRE II. — Équations aux dérivées partielles qui admettent un groupe à cinq paramètres.	51
CHAPITRE III. — Équations aux dérivées partielles qui correspondent à l'équation $y'y''' + my''^2$	60
CHAPITRE IV. — Classification des groupes homographiques à un paramètre du plan. Courbes planes admettant une transformation homographique infinitésimale. Interprétation géométrique des équations canoniques $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0, \quad \frac{dz}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^n, \quad \frac{dz}{dx} = e^{\frac{dy}{dx}}$	65
CHAPITRE V. — Équations aux dérivées partielles qui admettent un groupe à quatre paramètres. Équations qui correspondent à l'équation canonique ((4)).....	74
CHAPITRE VI. — Équations aux dérivées partielles qui admettent un groupe à quatre paramètres. (Suite.) Équations qui correspondent aux équations canoniques ((5)) $y''' = ky''^p,$ ((6)) $y''' e^{y''} = 1$	78

		Pages.
CHAPITRE VII. — Équations aux dérivées partielles qui admettent un groupe à quatre paramètres. (Suite.) Équations qui correspondent à l'équation canonique		
((7))	$xy''' + 3y'y'' = kx^{\frac{1}{2}}y''^2$	88
CHAPITRE VIII. — Sur deux classes particulières de complexes. Interprétation géométrique des équations aux dérivées partielles qui admettent un groupe à quatre paramètres		101
CHAPITRE IX. — Sur les caractéristiques des équations canoniques. Courbes gauches qui admettent une transformation homographique infinitésimale		115
TABLEAU DES ÉQUATIONS CANONIQUES		142
NOTE. — Réduction de plusieurs équations connues à la forme canonique. Transformation ponctuelle faisant correspondre aux tangentes d'une surface du second degré les droites rencontrant une conique		143



PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,

17427

Quai des Grands-Augustins, 55.
